

SÉRIE A, N° 2206
N° D'ORDRE : 3077

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LÉON AGOSTINI

AGRÉGÉ DE PHYSIQUE

1^{re} THÈSE

INFLUENCE DU LIBRE PARCOURS SUR L'ÉCOULEMENT D'UN GAZ
A LA VITESSE DU SON A TRAVERS UN ORIFICE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LE MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE

Soutenues le 11 juillet 1945, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. FOCH	Président.
		PAUTHENIER	Examineurs.
		KASTLER	

INFLUENCE DU LIBRE PARCOURS
SUR L'ÉCOULEMENT D'UN GAZ
A LA VITESSE DU SON A TRAVERS UN ORIFICE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

LÉON AGOSTINI

AGRÉGÉ DE PHYSIQUE

1^{re} THÈSE

INFLUENCE DU LIBRE PARCOURS SUR L'ÉCOULEMENT D'UN GAZ
A LA VITESSE DU SON A TRAVERS UN ORIFICE

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LE MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE

Soutenues le 11 juillet 1945, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. FOCH	{	Président.
		PAUTHENIER		Examineurs.
		KASTLER		



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires... { M. MOLLIARD.
C. MAURAIN.

Doyen P. MONTEL, Professeur, Théorie des Fonctions.

Professeurs honoraires	{	LÉON BRILLOUIN.	G. BERTRAND.	E. CARTAN.
		PÉCHARD.	Ch. FABRY.	E. BOREL.
		AUGER.	LÉON BERTRAND.	A. COTTON.
		DANGEARD.	WINTREBERT.	J. DRACH.
		LESPIEAU.	DUBOSCQ.	M. GUICHARD.
		VESSIOT.	BOHN.	M ^{me} RAMART-LUCAS.
		PORTIER.	RABAUD.	LABROUSTE.
		LAPICQUE.	CAULLERY.	GUILLIERMOND.

PROFESSEURS

Charles PÉREZ .	T	Zoologie.	H. CARTAN	Calcul différentiel.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	PÉRÈS	Mécanique rationnelle.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	HACKSPILL ...	T Chimie minérale.
C. MAUGUIN ...	T	Minéralogie.	TOUSSAINT	Technique aéronautique.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.	M. CURIE	Physique (P.C.B.).
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	G. RIBAUD	T Hautes températures.
G. BRUHAT	T	Physique.	CHAZY	T Mécanique analytique.
E. DARMOIS ...	T	Enseignement de Physique.	GAULT	Chimie (P.C.B.).
A. DEBIERNE ..	T	Physique générale et Radioactivité.	CROZE	Recherches physiques.
A. DUFOUR	T	Physique (P.C.B.).	DUPONT	T Théories chimiques.
L. DUNOYER...	T	Chimie-Physique.	VALIRON	T Calcul différentiel et intégral.
M. JAVILLIER ..	T	Chimie biologique.	BARRABÉ	Géologie structurale et Géologie appliquée.
Henri VILLAT ..	T	Mécanique des fluides et applications.	MILLOT.....	Biologie animale (P.C.B.).
Ch. JACOB	T	Géologie.	F. PERRIN.....	Théories physiques.
P. PASCAL	T	Chimie générale.	VAVON	T Analyse et mesures chimiques.
M. FRÉCHET ...	T	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.	G. DARMOIS ...	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
E. ESCLANGON .	T	Astronomie.	CHATTON	T Biologie maritime.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.	AUBEL	Chimie biologique.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.	J. BOURCART ..	Géographie physique et Géologie dynamique.
PAUTHENIER ..		Physique (P.C.B.).	M ^{me} JOLIO-CURIE..	Physique générale et Radioactivité.
DE BROGLIE ...	T	Théories physiques.	PLANTEFOL ...	Biologie végétale (P.C.B.).
CHRÉTIEN		Optique appliquée.	CABANNES	T Recherches physiques.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	GRASSÉ	T Zoologie (Évolution des êtres organisés).
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.	PRÉVOST	T Chimie organique.
COMBES	T	Physiologie végétale.	BOULIGAND ...	Mathématiques.
GARNIER	T	Application de l'analyse à la géométrie.	CHAUDRON	Chimie (P.C.B.).
PIVETEAU		Géologie.	WYART	Minéralogie.
ROCARD		Physique.	TEISSIER	Zoologie.
			MANGENOT ...	Biologie végétale (P.C.B.).
			P. AUGER	Physique.
			MONNIER	Physiologie générale.

Secrétaire A. PACAUD.

Secrétaire honoraire D. TOMBECK.

A Monsieur le Professeur

A. Foch,

en témoignage de profonde reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

INTRODUCTION	1
--------------------	---

CHAPITRE PREMIER

<i>Indications données par l'analyse dimensionnelle</i>	7
---	---

CHAPITRE II

<i>Etude optique de l'écoulement d'un gaz par un petit orifice</i>	9
--	---

CHAPITRE III

<i>Orifices utilisés : forme, mode de fixation</i>	13
A. — Fabrication et forme des orifices	13
B. — Support	14

CHAPITRE IV

<i>Etude du débit</i>	17
A. — Principe de la méthode de mesure	17
B. — Réalisation pratique :	19
1) Calcul des constantes de temps	20
2) Mesure des pressions et pertes de charge	27
3) Réglage des pressions	29
4) Mesure de la variation de pression amont	30

CHAPITRE V

<i>Mesures préliminaires</i>	33
A. — Détermination des corrections de perte de charge dans l'appareil de mesure des débits	33
B. — Mesure de la constante de temps de l'espace amont	40

CHAPITRE VI

<i>Résultats des mesures</i>	43
I. — Variation du débit avec la pression aval	43
Appendice : calcul du nombre de Reynolds R	48

CHAPITRE VII

<i>Résultats des mesures</i>	51
II. — Variation du débit avec la pression amont pour une pression nulle en aval	51
A. — Notations et formules utilisées	51
B. — Variation relative du coefficient de débit avec la pression amont.....	54
C. — Variation relative de débit avec le sens de parcours	60
D. — Mesure absolue du coefficient de débit.....	62
E. — Calcul du débit en régime moléculaire d'un orifice en paroi épaisse..	65
<i>Conclusion</i>	73

INTRODUCTION

La description et l'étude de l'écoulement d'un gaz dans un ajutage convergent-divergent a été faite si souvent, depuis les travaux de Saint-Venant, qu'il est inutile d'y revenir en détail ⁽¹⁾; dès que le rapport des pressions amont et aval est inférieur à 0,53 (pour un gaz diatomique), la vitesse du son est atteinte à la gorge et le divergent est en régime supersonique jusqu'à la section de sortie si la pression en aval est suffisamment basse. Le débit de gaz à travers la gorge est alors aS , où S est la surface de la gorge et a la vitesse du son en cet endroit; la température et la pression à la gorge sont dans un rapport constant avec les mêmes grandeurs mesurées dans le fluide amont au repos; il en est de même pour la vitesse du son et la densité; on en déduit que le débit mesuré en volume de gaz pris dans les conditions amont est constant si la température amont est fixe; il est indépendant des valeurs des pressions aval et amont pourvu que leur rapport reste inférieur à 0,53.

Un tel écoulement constitue donc un régulateur de débit remarquable. Il a été utilisé dans ce but moins souvent qu'on ne l'attendait; ceci est sans doute dû à la grandeur du débit ainsi réalisé qui atteint 150 cm³/s pour un diamètre de 1 mm. Pour avoir un débit plus faible, le diamètre doit être réduit; on ne peut alors songer à utiliser des tuyères mais des trous en mince paroi; l'écoulement qui s'établit alors est analogue au précédent; il a été étudié, en particulier, par HARTSHORN et STANTON pour des orifices de l'ordre du millimètre avec la pression atmosphérique en amont ⁽²⁾. La vitesse du son s'établit pour le même rapport de pression, mais la section minimum du jet où elle apparaît ne concorde pas avec la section de sortie de l'orifice; cette section minimum varie légèrement en grandeur et en position lorsque le rapport des pressions décroît et semble avoir atteint sa position limite pour un rapport des pressions voisin de 0,2; les variations du débit qui en résultent sont de quelques centièmes entre les valeurs 0,53 et 0,2 de ce rapport; elles sont de quelques dix millièmes au-dessous. L'emploi de tels orifices est donc encore très avantageux, l'influence des variations de pression, quoique non nulle, étant très affaiblie.

Mais le problème d'obtenir des débits utilisables n'était résolu que si l'on pouvait fabriquer de petits orifices à mince paroi, de moins de 0,1 mm de diamètre, dont la section soit bien définie et bien stable. La difficulté fut

(1) A. FOCH, *Introduction à la mécanique des fluides* (collection Armand Colin). — L. SANTON, *Contribution expérimentale à l'étude des souffleries supersoniques*, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 68.

(2) HARTSHORN, *Proc. Roy. Soc.*, 94-A, 1918 (155-165). — STANTON, *Proc. Roy. Soc.*, 111-A, 1926 (306).

levée par A. FORTIER ⁽¹⁾ qui a employé avec succès, comme régulateur de débit, des orifices de l'ordre de 3/100 mm utilisés avec des rapports de pression inférieurs à 0,1, la pression amont étant voisine de la pression atmosphérique.

La question se posait, néanmoins, de savoir dans quelles limites la constance du débit se maintenait pour ces petits orifices et si l'influence de la pression restait la même que pour les plus grands diamètres; il était naturel de s'attendre à voir apparaître, aux petites dimensions, des modifications dues à l'influence des parois.

Cette influence de la viscosité dans les écoulements supersoniques était d'ailleurs mise en question, à la même époque, dans un autre domaine d'études pratiques. La construction de souffleries supersoniques, où la chambre d'expériences est à une pression d'une fraction d'atmosphère et où la viscosité cinématique est donc considérablement accrue, poussait à se préoccuper de l'influence du nombre de Reynolds dans de tels écoulements, influence qui, jusqu'alors, a été négligée. L'étude des écoulements en paroi mince, quoique de nature différente, est susceptible de donner des renseignements intéressants, d'indiquer de quelle façon progressive ou brutale se manifeste l'influence de la viscosité, de montrer si le régime supersonique peut subsister aux faibles nombres de Reynolds.

Le paramètre qu'il convient d'introduire dans cette étude n'est d'ailleurs pas le nombre de Reynolds sous sa forme habituelle, mais sous la forme si suggestive et plus générale que lui a donné KARMAN en le faisant apparaître comme produit de deux nombres sans dimensions, de signification plus simple. L'idée de KARMAN consiste à remarquer que la viscosité cinématique d'un gaz est proportionnelle au produit $c \cdot l$ de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen; le nombre de Reynolds $R = \frac{v d}{\nu}$ est donc égal à un facteur constant près à $\frac{v}{c} \times \frac{d}{l}$, ce qui fait apparaître le rapport de la vitesse moyenne de l'écoulement à celle des molécules et le rapport des dimensions au libre parcours (d est une grandeur qui caractérise l'échelle de l'écoulement; pour un orifice circulaire ce sera son diamètre minimum). Mais, comme la vitesse moyenne est, pour une atomicité donnée, proportionnelle à la vitesse du son dans le gaz et de valeur voisine, il semble préférable d'introduire cette dernière grandeur qui définit la vitesse de propagation des perturbations de la pression dans le fluide. Le nombre de Reynolds s'écrit alors :

$$R = k \frac{v}{a} \times \frac{d}{l},$$

la constante étant, nous le verrons chapitre VI, voisine de $\frac{3}{2}$ pour un gaz diatomique.

(1) A. FORTIER, *Contribution à l'étude de la viscosité de l'air et des gaz*, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 111.

Le classement des divers écoulements peut alors se faire en utilisant les deux paramètres introduits, suivant le tableau ci-après :

VALEURS DE $\frac{d}{l}$	ÉCOULEMENTS SUBSONIQUES $v < a$ $R < \frac{d}{l}$	ORDRE DE GRANDEUR de R	ÉCOULEMENTS SUPERSONIQUES $R \gg \frac{d}{l}$ $v > a$
Supérieur à 10 000 pour des valeurs de d de l'ordre du millimètre et à la pression atmosphérique	"Grandes vitesses", écoulement turbulent, forces de viscosité négligeables	De l'ordre de 10^3 à 10^5 et au-dessus	Écoulements courants, adiabatiques Viscosité ou, plus exactement, phénomènes de transfert négligeables
	"Petites vitesses", écoulement laminaire, forces de viscosité prépondérantes	Inférieur à 10^3 environ	?
De l'ordre de l'unité et au-dessous	Phénomènes moléculaires		

Il apparaît, dans ce tableau, que l'étude du passage de l'écoulement adiabatique à l'écoulement moléculaire reste à faire.

D'ailleurs, lorsqu'il s'agit d'écoulements supersoniques, la notion de viscosité perd de sa simplicité; ceci provient tout d'abord de ce que les phénomènes de transfert portent, non seulement sur la quantité de mouvement, mais également sur l'énergie cinétique moyenne; il n'y a plus d'écoulement isotherme, comme en régime subsonique : viscosité et conductibilité calorifique sont intimement liées. D'autre part, les raisonnements classiques supposent des gradients assez faibles pour que les variations relatives de température et de vitesse puissent être traités comme des infiniment petits, pour un déplacement égal au libre parcours moyen, de telle sorte que la fonction de distribution des vitesses ne diffère qu'infiniment peu de la fonction de Maxwell. Or, ceci ne peut plus être vrai dans les écoulements supersoniques où, pour les valeurs modérées de R, d doit être d'un ordre de grandeur comparable à l et où par suite, d'après la conception classique, la vitesse, par exemple, devrait passer de zéro, sur la paroi, à une valeur supérieure ou égale à a , dans le fluide, sur une distance qui est de l'ordre de grandeur de l . Il est donc plus indiqué de prendre tout simplement pour paramètre le libre parcours l qui intervient dans tous les phénomènes de transfert.

Il ne faut pas, cependant, dissimuler que les difficultés qu'offrent la définition et le calcul de l dans un gaz voisin de l'état stable sont encore plus grandes ici, où la loi de répartition des vitesses est totalement inconnue. Mais ces difficultés ne sont pas éliminées, au contraire, quand l intervient dans le calcul de la viscosité et, par suite, quoique sa signification physique ne soit pas sans ambiguïté, son choix, comme paramètre explicite, est préférable.

Les variations de R peuvent être obtenues en modifiant d ou l . La modification de d doit entraîner une variation proportionnelle de toutes les dimensions jouant un rôle dans la définition de l'écoulement. Le libre parcours l peut être varié en modifiant la pression, en changeant de gaz (mais en conservant la même atomicité) ou encore en faisant varier la température. Ce programme n'a pu être réalisé que partiellement; les résultats obtenus montrent, néanmoins, que les phénomènes se laissent décrire en fonction du seul nombre de Reynolds; les écarts de similitudes doivent donc rester très faibles.

Des expériences que j'ai pu faire, il se dégage qu'il existe, pour les écoulements supersoniques, un intervalle de valeurs de R dans lequel l'influence du libre parcours doit pouvoir être décrite par des grandeurs statiques du genre de la viscosité et de la conductivité calorifique. Cette influence ne se manifeste de façon mesurable que lorsque le rapport $\frac{d}{l}$ est de l'ordre de quelques centaines; les phénomènes moléculaires proprement dits ne deviennent prépondérants que lorsque d est de l'ordre de grandeur d'une dizaine de libres parcours. L'apparition de l'influence du libre parcours ne semble pas se traduire par l'existence d'un nouveau régime d'écoulement, il semble qu'il y ait passage continu des écoulements courants à ceux étudiés ici; en effet, les expériences relatives aux valeurs moyennes se raccordent de façon continue à celles relatives aux grandes valeurs de R , tandis qu'au contraire une discontinuité de la loi de variation apparaît aux alentours de $R = 10$. Pour approfondir l'étude de cette zone de passage, deux séries d'expériences avaient été envisagées : mesure de la sélectivité de l'écoulement et examen optique du jet. Seule la deuxième a pu être partiellement réalisée. Ces expériences, décrites au chapitre II, ont permis d'établir que le régime d'écoulement sonique se maintenait pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 50 et, probablement aussi, pour des valeurs inférieures.

Les éléments du travail exposé ci-après ont été rassemblés aux cours d'expériences poursuivies de 1936 à 1939. L'interruption brutale et la destruction des appareils, dues à la guerre, ont restreint le champ des études projetées et n'ont pas permis de relever avec précision les dimensions de certaines parties de l'appareil (cf. chapitre VII, section D).

Ces recherches ont été effectuées au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Institut de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris, dont le directeur M. VILLAT, a bien voulu m'assurer la plus bienveillante compréhension.

M. FOCH, directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides, qui m'avait signalé l'intérêt que présenterait l'étude des écoulements soniques aux

petits nombres de Reynolds, a accepté d'assurer la direction de mon travail. L'intérêt qu'il lui a porté, l'apport de son esprit critique et de sa vaste érudition ont été, pour moi, d'une valeur inestimable. Sa sollicitude ne s'est pas moins manifestée pendant les années qui ont suivi, où il m'a assuré son soutien matériel et moral pendant que, prisonnier, je rédigeais ce travail d'après mes cahiers d'expériences, que j'avais pu sauvegarder. Il a bien voulu faire exécuter des expériences complémentaires sur la visualisation des écoulements et surtout s'occuper d'une première publication avant mon retour.

M. FORTIER, alors professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble n'a pas hésité, malgré ses nombreuses occupations, devant la tâche d'assurer la rédaction de cette première publication, d'après les notes que j'avais fait parvenir en France.

A tous ceux qui ont pris part à cette tâche ingrate, dans des circonstances difficiles, je veux exprimer ici ma très profonde reconnaissance.

INDICATIONS DONNÉES PAR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

L'analyse dimensionnelle permet de mettre en évidence, pour un écoulement donné, les variables indépendantes et de grouper les résultats relatifs à des écoulements semblables ou inversement, si ce groupement est possible, justifie l'hypothèse de la similitude.

Pour un orifice de profil donné, le débit en masse $\frac{dm}{dt}$ dépend, *a priori* : des dimensions de l'orifice qui seront représentées par le diamètre de sa section minima, des pressions amont et aval p_1 et p_2 , des propriétés du gaz qui, pour une atomicité donnée, seront représentées par sa densité ρ et le libre parcours moyen l de ses molécules. La vitesse en chaque point est déterminée si les variables précédentes sont fixées (en négligeant les champs de force extérieurs tels que la pesanteur et le travail des champs de force intermoléculaires); la vitesse n'est donc pas, *a priori*, une variable indépendante; nous poserons donc :

$$\frac{dm}{dt} = f(d, l, \rho, p_1, p_2) = \Sigma A d^\alpha l^\beta \rho^\gamma p_1^\delta p_2^\varepsilon;$$

les équations aux dimensions fournissent immédiatement les relations :

$$1 = \gamma + \delta + \varepsilon, \quad 0 = \alpha + \beta - (3\gamma + \delta + \varepsilon), \quad -1 = -2(\delta + \varepsilon),$$

d'où :

$$\frac{dm}{dt} = d^2 \sqrt{p_1 \rho} \Sigma A \left(\frac{l}{d}\right)^\beta \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\varepsilon = d^2 \sqrt{p_1 \rho} f\left(\frac{l}{d}, \frac{p_2}{p_1}\right);$$

le débit Q mesuré en volume de gaz pris à la température et la pression amont pourra donc s'écrire :

$$Q = \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = d^2 \sqrt{\frac{p_1}{\rho}} f\left(\frac{l}{d}, \frac{p_2}{p_1}\right),$$

ou enfin :

$$Q = a S f\left(\frac{l}{d}, x\right),$$

en posant $\frac{p_2}{p_1} = x$, en appelant S la surface du cercle de section minimum de l'orifice, en remarquant que $\frac{C}{c} \cdot \frac{p_1}{\rho} = a^2$ et faisant entrer dans f les facteurs constants ainsi introduits.

Pour $x = 0$ (pression aval nulle), le débit prend la valeur $Q_0 = aSf\left(\frac{l}{d}, 0\right)$;
le débit relatif $\frac{Q}{Q_0} = \frac{f\left(\frac{l}{d}, x\right)}{f\left(\frac{l}{d}, 0\right)}$ est donc une fonction de $\frac{l}{d}$ et de x .

Considérons maintenant deux orifices géométriquement semblables et admettons que si les valeurs de x et $\frac{l}{d}$ sont les mêmes dans les deux écoulements, ceux-ci sont eux-mêmes semblables dynamiquement. Dans cette similitude, les lignes de courants doivent être semblables, mais les vitesses doivent être égales en des points homologues, si le fluide et la température initiale de celui-ci sont les mêmes, ou dans un rapport indépendant de l'échelle, s'ils sont différents; en effet, la vitesse du son, qui ne dépend que du fluide et de sa température, doit être atteinte en des points homologues.

Si cette similitude est effectivement réalisée, le débit relatif sera représenté pour les deux orifices par la même fonction de $\frac{l}{d}$ et x , et, inversement, la possibilité d'une telle représentation justifiera le choix des variables indépendantes et l'hypothèse de la similitude.

ÉTUDE OPTIQUE DE L'ÉCOULEMENT D'UN GAZ PAR UN PETIT ORIFICE

L'étude des conditions d'écoulement à travers un orifice à mince paroi, dans des conditions telles que l'écoulement se fasse à la vitesse du son et que le nombre de Reynolds soit néanmoins assez petit, devait être précédée d'une série d'expériences montrant la réalité de l'écoulement de Saint-Venant dans ces conditions.

L'existence de vitesses égales ou supérieures à celle du son est chose acquise à partir du moment où l'on peut mettre en évidence la présence d'ondes de Mach. Pour les orifices en mince paroi, celles-ci se traduisent par la structure périodique du jet dans l'espace aval indiquée et étudiée par PARENTY (1), PRANDTL et EMDEN (2).

On sait qu'EMDEN (2) a lié la longueur d'onde λ du phénomène stationnaire obtenu au diamètre d du trou et aux pressions amont et aval P et p par la relation empirique :

$$\lambda = 0,87 d \sqrt{\frac{P}{p} - 1,89}.$$

Etablie pour de gros orifices, cette formule donne un terme de comparaison pour le comportement des trous de diamètres plus petits.

Les orifices utilisés, percés dans une pièce massive de maillechort, avaient un profil tronconique. L'air sortait par la section de plus petit diamètre. Les valeurs de ce diamètre s'échelonnaient entre 3 et 50 centièmes de millimètre. Les photographies du jet gazeux étaient obtenues par la méthode classique des rayons aberrants convenablement modifiée. La principale difficulté était d'éliminer la lumière diffractée par la paroi dans laquelle est percé le trou; cette élimination a été obtenue par un choix convenable du couteau utilisé pour cacher l'image de la source. En effet, les rayons diffractés par le bord d'un écran rectiligne placé devant une lentille coupent le plan focal, suivant une droite perpendiculaire à ce bord; l'emploi d'un couteau rectiligne, dirigé

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 7^e série, 8, 1896, p. 5; 12, 1897, p. 289.

(2) *Annalen der Physik* 69, 1899, p. 264.

suivant cette droite, élimine donc la lumière diffractée. L'emploi de ce procédé et d'un montage n'utilisant qu'une lentille a permis d'obtenir d'excellentes photographies avec les jets émis par des orifices ne dépassant pas 3 centièmes de millimètre de diamètre.

Le diamètre apparent de la source n'intervient pas dans la définition de l'image finale, mais seulement, à éclairément égal du jet, dans la brillance de cette image, brillance qui diminue lorsque croissent les dimensions de la source (un arc utilisant l'effet Beck).

Les photographies obtenues montrent que la relation d'Emden est vérifiée tant que les stries sont visibles; celles-ci sont visibles pour tous les orifices aux fortes pressions, elles semblent disparaître pour un rapport $\frac{P}{p}$ un peu plus élevé lorsque le diamètre est petit (2,20 au lieu de 1,89 pour un diamètre de 0,03 mm).

Ces expériences montraient donc déjà la réalité de l'écoulement sonique pour ces diamètres d'orifice; pour descendre utilement à des diamètres inférieurs, il aurait fallu obtenir un pouvoir séparateur suffisamment élevé pour mettre en évidence la structure périodique de l'écoulement; mais indépendamment de la difficulté d'obtenir les orifices, la méthode employée ne permettait pas elle-même d'accroître le pouvoir séparateur. En effet, celui-ci est limité par l'ouverture du faisceau de rayons utilisé pour fournir l'image; or, celle-ci est déterminée par la déviation du rayon lumineux dans le jet. Celle-ci peut être mesurée approximativement en faisant varier la dimension de l'écran interceptant l'image de la source; si a est la dimension minimum de l'écran supprimant tout éclairément de l'image du jet et f la distance focale de la lentille, l'ouverture maxima est $u = \frac{a}{f}$ et le pouvoir séparateur est alors donné par $\frac{\lambda}{u}$, où λ représente la longueur d'onde moyenne utilisée.

Plutôt que de continuer avec des orifices de diamètres décroissants, il était plus indiqué de diminuer la pression amont, mais alors la densité diminuant il était à prévoir que le pouvoir séparateur allait encore diminuer, puisque la déviation diminuait et, de plus, l'éclairément de l'image devait décroître rapidement.

J'ai alors songé à utiliser, pour observer les différences de densité du jet, l'illumination électrique du gaz.

Les premières expériences ont été faites en utilisant une bobine de Ruhmkorf et un montage de fortune, où il n'était pas prévu de mesure de la pression; avec un orifice de 10/100 mm, l'aspect strié du jet a pu être observé au microscope pour une pression qui, à l'aspect lumineux du gaz, devait être de l'ordre de quelques millimètres de mercure à l'amont soit, en admettant $p_1 = 5$ mm, un nombre de Reynolds (voir chapitre VI, appendice) $R = (100 \times 5)$ égal à 10 environ.

J'envisageais de reprendre ces expériences de façon systématique: l'observation du gaz par luminescence offre, en effet, les avantages d'une grande luminosité, d'une émission de lumière non dirigée permettant l'emploi de grands

angles d'ouverture utile et l'observation directe au microscope. La méthode permettrait sans doute d'obtenir des renseignements sur la densité dans le gaz, une fois connue la relation entre la brillance du gaz et sa densité. L'inconvénient principal réside dans la possibilité d'un échauffement difficile à chiffrer du gaz.

Ces expériences, reprises dans des conditions mieux définies par COMOLET ⁽¹⁾, ont donné des renseignements intéressants sur les différentes formes prises par le jet. Les résultats, en ce qui concerne l'existence d'un régime de Saint-Venant, n'ont pas été concluants pour les orifices de quelques centièmes, mais il semble qu'on puisse conclure avec certitude à l'existence de ce régime pour les nombres de Reynolds supérieurs à 50.

(1) *Diplôme d'Études Supérieures*, Paris 1942.

CHAPITRE III

ORIFICES UTILISÉS : FORME, MODE DE FIXATION

A. — FABRICATION ET FORME DES ORIFICES

Les premiers orifices (orifices AA, AB, AC, AE) étudiés étaient faits suivant la technique mise au point par FORTIER (1) et étaient donc percés dans des pièces tournées dans du maillechort massif et soudés dans un

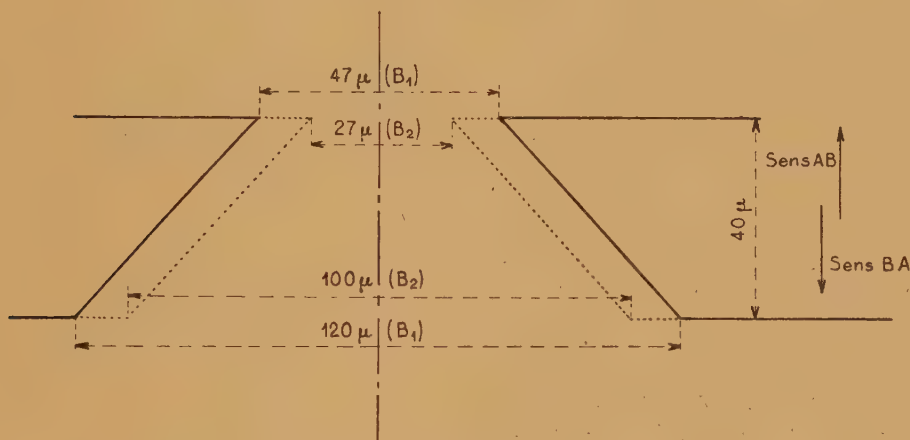


Fig. 1. — Profil des orifices étudiés

support en laiton en deux parties vissées, l'étanchéité étant assurée par un joint en plomb.

Ce mode de construction donne des orifices stables et le support peut être placé dans le liquide d'un thermostat; mais le voile métallique, dans lequel est percé l'orifice, étant obtenu par martellement au pointeau, il est difficile d'obtenir ainsi des orifices de dimensions différentes et semblables et il est même difficile de connaître le profil exact de l'orifice; d'autre part, le support introduit entre le pointeau et l'orifice un volume trop grand.

Après des essais divers, les orifices ont été percés dans des rondelles de nickel pur, de 8 mm de diamètre, découpées dans des feuilles d'épaisseur bien définie, que l'on peut obtenir dans le commerce. C'est ainsi que les orifices B_1

(1) FORTIER, *Contribution à l'étude de la viscosité de l'air et des gaz*, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 111.

et B_2 ont été percés dans des rondelles de $40\ \mu$ d'épaisseur; les sections d'entrée et de sortie étaient alors bien définies. D'autres expériences n'ont pu être faites avec des orifices d'épaisseurs différentes pour obtenir des séries de mesures portant sur des orifices rigoureusement semblables.

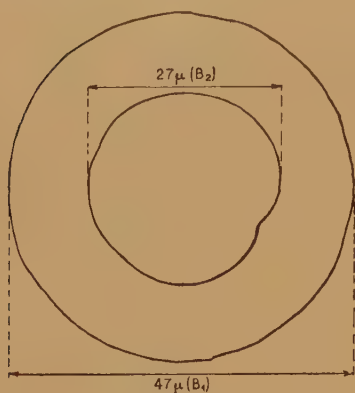


Fig. 2. — Section minima des orifices étudiés

La seule partie délicate de la confection des orifices était l'affûtage de la mèche qui, comme pour FORTIER, était une mèche triangulaire en acier rapide (mèche à verre) affûtée à la main, en contrôlant l'opération au microscope; les angles au sommet du trièdre devaient être sensiblement toujours les mêmes, les arêtes bien rectilignes et le rayon de la pointe inférieur au micron. Il n'était pas très difficile, avec un peu d'habitude, de percer une série d'orifices dont le diamètre soit voisin d'une valeur donnée, il suffisait d'en sélectionner un du diamètre voulu et de section circulaire. L'examen au microscope permettait de

vérifier que les sections extrêmes étaient bien définies et de déterminer le profil de l'orifice; ceux des orifices B_1 et B_2 sont indiqués dans la *figure 1*. La *figure 2* donne le contour de la plus petite section des orifices, relevé à la chambre claire.

B. — SUPPORT

Le support devait être de petit volume et parfaitement étanche; il était relié à un inverseur (décrit au chapitre V, *fig. 5*) permettant de changer rapidement le sens de parcours du gaz.

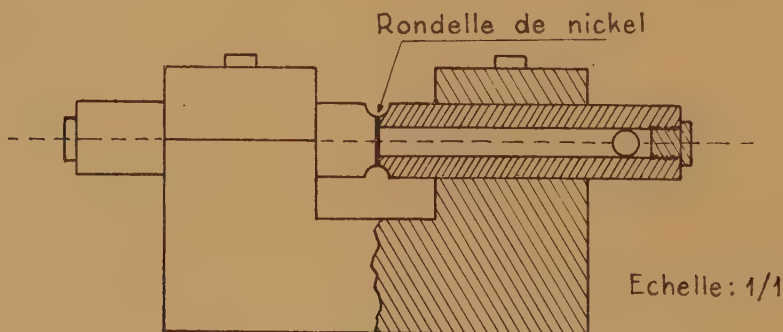


Fig. 3. — Élévation et coupe du support des orifices

Ce support était constitué par deux tubes de laiton (*fig. 3*) couissant dans un support en laiton massif destiné à assurer à l'ensemble une certaine inertie calorifique et dans lequel était ménagée une cavité où venait se loger le réservoir d'un thermomètre. La rondelle de nickel était serrée entre les

deux tubes dont le diamètre extérieur était légèrement inférieur au sien; les tubes étaient alors bloqués et l'étanchéité assurée par un cordon de picéine. Cette étanchéité était prouvée par la bonne tenue au vide de la partie de l'appareil comprenant le support; étant donné le petit volume de cette partie, la tenue au vide était facile à vérifier; d'après la construction de l'appareil, les fuites entre l'amont et l'aval de l'orifice ne pouvaient être supérieures aux fuites avec l'extérieur. L'étanchéité des robinets de l'inverseur a été de même vérifiée, à plusieurs reprises, en plaçant une rondelle non percée dans le support; les fuites entre deux conduits des robinets à double voie étaient indécélables lorsque le graissage était fait normalement; l'absence de fuite résultait également de la fidélité des résultats des mesures après plusieurs manœuvres successives.

ÉTUDE DU DÉBIT

A. — PRINCIPE DE LA MÉTHODE DE MESURE

Le débit du gaz est réglé par un robinet pointeau fonctionnant, en régime sonique, à partir d'une pression amont p_a , constante pour un réglage donné. La pression p_1 , à l'amont de l'orifice étudié, serait indépendante de la pression aval p_2 , en régime sonique, si la relation de Saint-Venant était rigoureusement vraie pour l'orifice. Les variations de p_1 donnent donc directement celles du débit de l'orifice en fonction du rapport $x = \frac{p_2}{p_1}$ des pressions aval et amont (1).

Soit Q_m le débit, mesuré en volume de gaz à la pression p_{1m} , et à la température T de l'espace amont, correspondant à la pression aval p_{2m} minimum; si ρ_m est alors la densité du gaz dans l'espace amont, et M le débit en masse à travers l'appareil, on a :

$$M = Q_m \rho_m.$$

Pour une autre pression aval p_2 , le débit sera Q , la densité ρ et le débit étant resté le même, $M = Q \rho$; donc :

$$\frac{Q}{Q_m} = \frac{\rho_m}{\rho}$$

d'où, en assimilant le gaz à un gaz parfait :

$$\frac{Q}{Q_m} = \frac{p_{1m}}{p_1}.$$

La pression initiale p_{1m} est modifiée en faisant varier le débit M par réglage du pointeau; la relation $M = Q \rho$, toujours satisfaite, permet d'étudier si M est connu de la variation de Q avec la pression p_1 . Pour une valeur donnée de $x = \frac{p_2}{p_1}$, ce débit en volume devrait être indépendant de p_1 si le nombre de Reynolds ne jouait pas. La valeur de M se déduit de la valeur de la perte de

(1) La constance du débit du pointeau est beaucoup moins grande que pour un orifice circulaire, mais elle peut être admise, pour de petites variations de p_2 , telles que celles considérées; les écarts interviennent comme correction négligeable.

charge dans un capillaire C maintenu à 0° et placé en amont du pointeau; cette perte de charge H est proportionnelle au débit en volume de gaz; le produit $H p_A$ est donc proportionnel au débit en masse M (voir chapitre VII).

La mesure directe du débit en volume, qui pourrait être réalisée en plaçant le capillaire après le pointeau, plus simple *a priori*, présente comme inconvénients :

1° d'augmenter considérablement le volume de l'espace amont de l'orifice;

2° surtout de faire intervenir la variation apparente de la viscosité avec la pression (loi de Knudsen, voir chapitre V), variation qui n'est pas définie avec une précision comparable à celle cherchée ici.

Corrections.

Dans les mesures de débit relatif $\frac{Q}{Q_m}$, il y aurait lieu de corriger les valeurs obtenues des variations éventuelles du débit M et de tenir compte des variations de température de l'orifice lorsque celui-ci n'est pas maintenu à température constante.

Le débit M varie avec la température du pointeau, liée à la température ambiante T (voir section B, § 4 de ce chapitre), et avec la pression p_A à l'amont du pointeau.

Ces variations de débit sont mesurées par celles de H, p_A , T et les corrections correspondantes devaient être faites dans les premiers appareils pour chaque mesure car, par suite de la lenteur des mesures, les variations étaient notables et leur sens pouvait même s'inverser au cours d'une série de mesures; ces corrections étaient très incertaines, par suite des erreurs de lecture qui prenaient alors une importance très grande.

Dans les derniers appareils, toutes les précautions étaient prises pour que la pression p_A ne puisse varier que très lentement et que les variations de température ambiante soient faibles et lentes également; la masse assez grande (quelques centaines de grammes) des supports métalliques et massifs de l'orifice et du pointeau agissait dans le même sens en éliminant les fluctuations rapides de température. D'autre part, la durée d'une série de mesures correspondant à une valeur donnée de la pression initiale p_{1m} a été considérablement diminuée.

Dans ces conditions, les corrections ont pu être faites en admettant simplement que toutes les variations étaient linéaires en fonction du temps pendant la durée d'une série de mesures, qui variait entre une demi-heure et une heure. Il en a été de même pour la correction de température de l'orifice; celui-ci était maintenu à 0° dans les premiers appareils; il a été laissé à la température ambiante dans les derniers, où la réduction du volume amont était recherchée.

Chaque série de mesures se terminait donc par une mesure de fermeture, pour une pression p_{2m} égale à la pression aval initiale, et si p_1 ne reprenait pas

la valeur p_{im} , chaque mesure était corrigée d'une quantité proportionnelle au temps la séparant de la première mesure. Les résultats de mesures faites ainsi étaient très bien reproductibles et ont été parfaitement concordants, pour des mesures faites dans des conditions assez différentes, après une interruption de huit mois; l'accord, excellent pour les débits relatifs, ne l'était pas moins pour la mesure du débit absolu, ce qui a permis la comparaison des mesures faites alors sur l'hydrogène à celles faites auparavant avec l'air.

B. — RÉALISATION PRATIQUE (fig. 4)

Les difficultés de réalisation des mesures proviennent, d'abord, de la petitesse des débits utilisés, qui conduit à des durées très grandes pour l'établis-

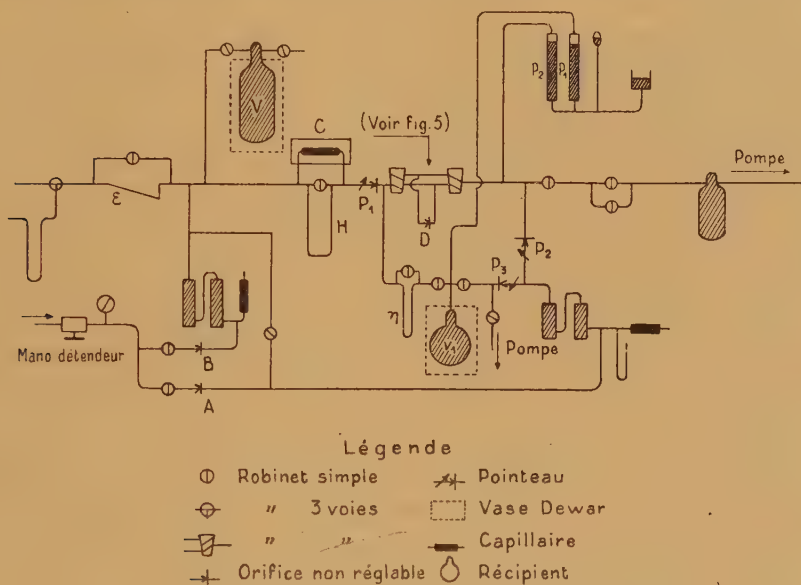


Fig. 4. — Schéma d'ensemble du montage expérimental

sement de l'équilibre des pressions; elles proviennent surtout de la petitesse des variations relatives de débit à mesurer, celles-ci étant, dans beaucoup de cas, inférieures à 1/1 000.

Ces questions sont d'ailleurs étroitement liées, car l'obtention d'une grande précision exige des mesures rapides pour que les corrections ne prennent pas des valeurs inacceptables et la définition de l'équilibre est d'autant plus restrictive que la précision des mesures est plus grande.

L'appareil et la technique de mesures qui avaient commencés à être utilisés dans les derniers groupes de mesures résultent des modifications apportées aux premiers appareils, à la suite des calculs et des mesures sur la mise en équilibre de l'appareil, que nous allons maintenant exposer. Les indications numériques qui sont données sont relatives aux appareils I_A, I_B, et II utilisés

en dernier et qui ne diffèrent entre eux que par le diamètre des tubes qui aboutissent au diaphragme (voir chapitre V).

1. — Calcul des constantes de temps.

La constante de temps réglant la mise en équilibre des pressions doit être très différente, suivant la section de l'appareil considérée. Dans la partie amont de l'appareil proprement dit, c'est-à-dire à l'amont du capillaire C, elle doit être grande pour éliminer les variations de pression rapides; dans le reste de l'appareil, la constante relative à chaque section doit être, à des degrés différents, aussi faible que possible.

Il est bien évident que, pour des dimensions données des orifices et des capillaires d'amenée et de sortie du gaz, la pression d'équilibre, dans un récipient, sera atteinte d'autant plus vite que le volume de celui-ci sera plus petit. Il est néanmoins utile de connaître explicitement la valeur des constantes de temps intervenant dans les exponentielles du régime transitoire.

Soit p la pression dans le récipient, V son volume, p_A et p_B les pressions dans les espaces amont et aval. La température T est supposée uniforme; les masses spécifiques du gaz sont donc liées aux pressions par :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_A}{\rho_A} = \frac{p_B}{\rho_B} = A, \quad \text{en posant} \quad A = rT$$

(dans tous ces calculs de précision médiocre, les gaz peuvent être considérés comme parfaits).

La masse m de gaz contenue dans le récipient est liée, à chaque instant, à la pression p par la relation $pV = Am$; la variation de p , avec le temps t , est donc donnée par :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{A}{V} \frac{dm}{dt}.$$

PREMIER CAS : *Les orifices d'entrée et de sortie sont en régime sonique.*

Dans ce cas, leur débit mesuré en volume de gaz dans les conditions de l'espace amont de l'orifice est constant; les variations, atteignant au plus quelques centièmes, mises en évidence ailleurs, n'ont pas d'importance ici. Les débits en masse des orifices d'entrée et de sortie s'écrivent donc respectivement :

$$M = k \rho_A = \frac{k}{A} p_A \quad \text{et} \quad M' = k' \rho = \frac{k'}{A} p,$$

k et k' étant des constantes proportionnelles à la surface des orifices et à la vitesse du son dans le gaz.

La vitesse d'accroissement de la masse de gaz contenue dans le récipient est donc :

$$\frac{dm}{dt} = M - M' = \frac{1}{A} (kp_A - k'p);$$

d'autre part, si l'on néglige la variation de V (voir ci-après), on a :

$$dm = Vd\rho = \frac{V}{A} dp,$$

et p est donné par l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{V} (kp_A - k'p) \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dt} + \frac{k'}{V} p = \frac{k}{V} p_A,$$

dont l'intégrale générale est la somme d'une intégrale particulière et de l'intégrale de l'équation sans second membre qui est :

$$p = K \exp. \left(-\frac{k'}{V} t \right)$$

et fait apparaître la constante de temps $\tau = \frac{V}{k'}$.

Si p_A est constant, une solution particulière est la solution d'équilibre :

$$\bar{p} = \frac{k}{k'} p_A \quad \frac{dp}{dt} = 0.$$

Si la valeur initiale p_0 de p est différente de $\bar{p}$, p tend vers cette valeur suivant la loi :

$$p - \bar{p} = (p_0 - \bar{p}) \exp. \left(-\frac{t}{\tau} \right).$$

La connaissance de τ est importante car elle permet de déduire la valeur exacte $\bar{p}$ de la mesure des valeurs de p proches de l'équilibre (voir § 4). Nous voyons que τ dépend uniquement du volume du récipient et des caractéristiques de l'orifice de sortie; par suite, pour le volume précédant l'orifice étudié, cette constante de temps doit être la même pendant toutes les mesures faites avec un même orifice et un même gaz (en négligeant, évidemment, les variations de k' avec la pression p_1).

Si p_A est variable dans le temps suivant la loi linéaire :

$$p_A = at + p_{A0},$$

il y a une intégrale particulière de la forme $\bar{p} = bt + d$. En portant cette relation dans l'équation, on trouve :

$$\bar{p} = \frac{k}{k'} [p_A - a\tau],$$

et la solution générale s'écrit :

$$p - \bar{p} = (p_0 - \bar{p}_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Remarque.

En réalité, le volume V varie par suite du déplacement du niveau du manomètre, on a donc $dV = s dp$, si p est mesuré en hauteur du liquide manométrique; d'où, puisque $pV = Am$:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} \quad \text{et} \quad \frac{dm}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dp}{dt} (V + ps),$$

l'équation donnant p s'écrit :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{k'}{V + ps} p = \frac{k}{V + ps} p_A;$$

dans bien des cas on peut négliger la variation relative de $V + ps$ avec p , mais la constante de temps prend la valeur :

$$\tau' = \frac{V + ps}{k'}.$$

DEUXIÈME CAS : *L'orifice de sortie seul est en régime sonique.*

L'orifice d'entrée est un tube capillaire dans lequel la perte de charge $h = p_A - p$ est petite devant p ; le débit d'entrée est donné (formule de Meyer) par :

$$M = \frac{K}{2A} (p_A^2 - p^2) \quad \text{où} \quad \frac{1}{K} = \frac{8\mu l}{\pi R^4}, \quad A = \frac{p}{\rho}.$$

L'équation donnant p s'écrit :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{K}{2V} (p_A^2 - p^2) - \frac{k'}{V} p,$$

mais si nous négligeons h devant p_A et p , nous pouvons écrire plus simplement :

$$M = \frac{K}{A} ph,$$

d'où l'équation :

$$(I) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{p}{V} (Kh - k');$$

la valeur de h correspondant à l'équilibre est donc $\bar{h} = \frac{k'}{K}$.

Prenons comme nouvelle variable $h = p_A - p$; nous avons :

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dp}{dt} = \frac{dp_A}{dt};$$

or (I) nous donne :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{h - \bar{h}}{\tau_1},$$

en posant :

$$\tau_1 = \frac{V}{Kp};$$

faisons encore le changement de variable $h - \bar{h} = z$, la forme finale de l'équation est :

$$(I') \quad \frac{dz}{dt} + \frac{z}{\tau_1} = \frac{dp_A}{dt}.$$

Si p_A est constant, z tend vers zéro suivant la loi :

$$z = z_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right).$$

La constante de temps peut s'écrire $\tau_1 = \frac{V}{K} \frac{\bar{h}}{p}$; elle est donc proportionnelle à la perte de charge correspondant à l'équilibre (p est traité dans τ_1 comme une constante, car ses variations restent très petites par hypothèse).

Supposons que la pression p_A varie linéairement en fonction du temps, ce qu'il est toujours légitime de supposer pendant un temps assez court; en raison des approximations faites (h négligeable devant p et p_A), la variation de p_A doit toujours rester petite devant p_A pour que les solutions données soient valables. Posons $p_A = p_{A_0} + at$; l'équation (I') donne :

$$\frac{dz}{dt} + \frac{z}{\tau_1} = a$$

d'où, en supposant l'équilibre réalisé ($z = 0$) au temps $t = 0$, où p_A commence à varier :

$$z = a\tau_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right].$$

Au bout d'un temps t , grand devant τ_1 , z prend la valeur d'équilibre $\bar{z} = a\tau_1$, d'où $h = \bar{h} + a\tau$, où $\bar{h}$ représente toujours la valeur d'équilibre $\frac{K'}{K}$ indépendante de p_A .

Cette formule permet de déterminer, pour une constante de temps donnée, la valeur maximum de la vitesse de variation de la pression amont tolérable pour que l'erreur sur h soit inférieure à une limite donnée. Elle permet également, pour une valeur donnée de a , de déterminer τ (chapitre VII D).

Cette erreur sur $\bar{h}$ ne prend une valeur appréciable que si la variation de vitesse a se maintient pendant un temps comparable à τ ; de même, la vitesse de variation de la pression p donnée par $\frac{dp}{dt} = \frac{dp_A}{dt} - \frac{dz}{dt} = a - \frac{dz}{dt}$ est d'abord nulle au temps 0 $\left(\frac{dz}{dt} = a\right)$ et tend vers a au bout d'un temps grand devant τ , lorsque $\frac{dz}{dt} = 0$.

TROISIÈME CAS : *Les orifices d'entrée et de sortie sont des capillaires.*

Nous pouvons prendre pour débits d'entrée et de sortie :

$$M = \frac{K}{A} ph, \quad M' = \frac{K}{A} ph',$$

toujours dans l'hypothèse que les pertes de charge sont petites devant les pressions; p est donné par :

$$(II) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{p}{V} (Kh - K'h');$$

l'équilibre est réalisé pour $K\bar{h} = K'\bar{h}'$ ou, puisque $h = p_A - p$ et $h' = p - p_B$, pour une pression d'équilibre $\bar{p} = \frac{Kp_A + K'p_B}{K + K'}$. En remplaçant h et h' par leurs valeurs dans (II), on obtient :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{V} [Kp_A + K'p_B - (K + K') p],$$

qui s'écrit :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{\tau_2} \left(1 - \frac{p}{\bar{p}}\right)$$

en posant :

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{Kp_A + K'p_B}{V\bar{p}};$$

mais, à l'approximation supposée, on peut prendre $p_A = p = p_B = p$, donc, l'équation s'écrit :

$$(II') \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\bar{p} - p}{\tau_2},$$

la constante de temps pouvant s'écrire :

$$\tau_2 = \frac{V}{(K + K')p}.$$

Étude de deux cas particuliers.

I. — Supposons maintenant que p_B soit la pression dans un récipient du genre étudié au deuxième cas, mais que τ_2 soit grand devant τ_1 ; on peut prévoir que la pression, dans le premier récipient, variera comme si le deuxième n'existait pas.

En effet, soient $\bar{h}$ et $\bar{h}'$ les pertes de charge à l'équilibre données par les égalités $K\bar{h} = K'\bar{h}' = k'$; posons $h = \bar{h} + z$, $h' = \bar{h}' + z'$; les équations de fonctionnement sont l'équation (I) qui s'écrit ici :

$$\frac{dp_B}{dt} = \frac{z}{\tau_1}$$

et l'équation (II) qui s'écrit, en y remplaçant h et h' par leurs valeurs ci-dessus :

$$(II'') \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\tau_2} \frac{Kz - K'z'}{K + K'}.$$

Calculons :

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{dp_B}{dt} = \frac{K}{K + K'} \frac{z}{\tau_2} - \frac{z'}{\tau_1} \left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{K}{K + K'} \right),$$

où le terme $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ peut être négligé d'après l'hypothèse que $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$; on a donc :

$$(III) \quad \frac{dh'}{dt} = \frac{K}{K + K'} \frac{z}{\tau_2} - \frac{z'}{\tau_1}.$$

Supposons que l'équilibre étant établi ($z = z' = 0$), p_A subisse un accroissement : h croît, z devient donc positif; p croît à son tour, h' croît, z' , d'abord nul, devient également positif mais sa valeur est limitée, d'après (III), puisque $\frac{dh'}{dt}$ est positif; on a donc $z' \leq z \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{K}{K + K'}$, l'égalité ne se réalisant que lorsqu'on atteint le nouvel état d'équilibre. Par hypothèse $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$; donc, dans (II''), le terme en z' est négligeable devant l'autre, on peut écrire $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\tau_2} \frac{Kz}{K + K'}$; on est ramené à une équation du type (I) où l'on pose :

$$\tau = \tau_2 \frac{K + K'}{K} = \frac{V}{Kp}.$$

Par suite, la pression, dans le premier récipient, varie bien comme si celui-ci était directement relié à l'orifice supersonique.

Ceci étant acquis, étudions maintenant l'influence des variations de p_A sur la mesure de $\bar{h}$.

Supposons que p_A subisse une variation Δp_A brusque (c'est-à-dire pratiquement dans un temps petit devant τ); h prend la valeur $h + \Delta p_A$ et le retour à l'équilibre se fait avec la constante de temps τ ; donc :

$$z = \Delta p_A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{z}{\tau} = \frac{\Delta p_A}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Mais τ étant grand devant τ_1 , un temps t déjà grand devant τ_1 sera encore petit devant τ ; au temps t on aura donc encore :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\Delta p_A}{\tau}$$

et, d'après l'étude du deuxième cas, l'erreur sur $\bar{h}'$ sera :

$$\Delta \bar{h}' = \frac{dp}{dt} \tau = \frac{\tau_1}{\tau_2} \Delta p_A.$$

Appliquons ce résultat à l'espace amont du capillaire C : $\tau = 1200$ s et, pour l'espace compris entre celui-ci et le pointeau P_1 : $\tau_1 = 14$ s, soit à peu près $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{1}{100}$; pour que $\Delta \bar{h}' < \frac{2}{100}$ mm SO^4H^2 , il suffira que $\Delta p_A < 1$ mm $\text{SO}^4\text{H}^2 = 0,26$ mm Hg; des variations rapides de la pression atmosphérique supérieures à cette valeur sont exceptionnelles.

Supposons maintenant une variation continue de $p_A = p_{10} + at$; si celle-ci se prolonge pendant un temps supérieur à τ , soit de l'ordre d'une heure, $\frac{dp}{dt}$ deviendra égal à a et l'erreur atteindra $\Delta h' = a\tau$; la condition $\Delta h' < 0,02$ mm SO^4H^2 donne alors $a < \frac{\Delta h'}{\tau_1}$; la variation en un temps τ devra être inférieure à $\tau \frac{\Delta h'}{\tau_1} = 0,26$ mm Hg, soit 0,8 mm Hg à l'heure; de telles vitesses de variation continue sont, elles aussi, assez rares.

En définitive, les grandes variations de pression, en général lentes, et les variations rapides, en général petites, sont ainsi sans influence notable sur la valeur de h' (qui, dans notre appareil, est la perte de charge H dans C), et, de plus, les variations de la pression p sont rendues lentes et régulières ⁽¹⁾. Le

(1) Il n'y a pas d'intérêt à augmenter la valeur de τ au delà de celle choisie car les délais de mise en fonctionnement de l'appareil seraient exagérés.

contrôle des variations de p_A est d'ailleurs facile : en ce qui concerne les variations rapides l'appareil n'est autre qu'un baromètre différentiel dont le manomètre ϵ (fig. 4) permet de détecter des variations de p_A inférieures à 0,01 mm Hg. S'il y a, en outre, une variation lente de p_A , l'écart z a pour valeur moyenne $a\tau$, mais un robinet permet d'éliminer la plus grande partie du volume V , rendant la constante de temps au moins cent fois plus faible; z prend alors tout de suite sa nouvelle valeur d'équilibre $z_1 = \frac{a\tau}{100}$ pratiquement négligeable; la variation de z donne $a\tau$.

II. — Nous étudierons, comme deuxième cas particulier, l'équilibre du récipient utilisé comme espace amont dans l'étude des débits avec de l'hydrogène (fig. 4). L'espace tampon de volume V est alimenté par un diaphragme sonique, à pression amont constante p' (débit en volume k_1); le gaz s'écoule du volume V dans l'atmosphère, par le capillaire, et dans l'appareil, par le pointeau (débit en volume k') (en négligeant l'influence du capillaire C qui, comme nous venons de le voir, n'influe pas sur la variation de p).

L'équation de fonctionnement est :

$$k_1 p' - K p h - k' p = V \frac{dp}{dt},$$

ou :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{Kp}{V} h = \frac{k_1 p' - k' p}{V};$$

on est ramené au deuxième cas avec la constante $k_1 p' - k' p$ (positive par un choix convenable de k_1) au lieu de $k' p$; la constante de temps $\frac{V}{Kp}$ est la même pour un même capillaire et un même volume que dans le cas précédent. D'autre part, si p' varie, la variation relative de h est de l'ordre de grandeur de la variation relative de p' ; la variation relative de p est donc très faible.

2. — Mesure des pressions et pertes de charge (fig. 4).

a) Mesure de p_2 et p_{1m} .

Ces pressions étaient mesurées au moyen de manomètres à mercure. Les ménisques, convenablement éclairés, étaient visés par des lunettes à oculaire micrométrique permettant d'interpoler les divisions d'une règle métallique graduée suspendue entre les deux tubes de mesure. Ce manomètre comprenait deux tubes de 2 cm de diamètre et 80 cm de haut, reliés à leur partie supérieure aux espaces où régnaient les pressions p_2 et p_{1m} ; un troisième tube, formé par un tube de 2 mm de diamètre intérieur, était terminé par une ampoule dans laquelle régnait le vide barométrique et où une pointe de verre permettait de déterminer un niveau de référence. La liaison était assurée, à la partie inférieure des trois tubes, par des tubes de caoutchouc à vide qui ne produisaient aucun dégagement gazeux car ils étaient soumis à une pression interne supérieure à la pression atmosphérique; un réservoir à mercure, monté sur vis,

permettait de ramener le niveau du mercure au contact de la pointe; la précision de ces mesures de pression était supérieure à 1/20 mm, voisine de 0,02 à 0,01 mm lorsque la pression atmosphérique ne présentait pas de variations rapides (variations de quelques 1/100 de mm se produisant le plus souvent, mais pas uniquement, par grand vent).

b) *Mesure de p_1 .*

La valeur de p_1 ou, plus exactement, de $p_1 - p_{1m} = \eta$, est donnée par un manomètre à acide sulfurique mesurant la différence de pression entre l'amont de l'orifice et un récipient maintenu à température constante où règne la pression p_{1m} . Cette disposition donne une grande sensibilité pour les mesures de variation de p_1 et permet d'avoir un espace amont de volume très réduit; la constante de temps a pu être ainsi abaissée, pour l'écoulement de l'air à travers un orifice de 27 μ de diamètre, à 120 s.

c) *Mesure de la perte de charge H dans le capillaire C.*

Cette mesure est faite avec un manomètre en U, à acide sulfurique; ce liquide constitue un liquide manométrique de viscosité convenable, de tension de vapeur très inférieure au 1/100 de mm, de densité relativement faible (1,85 à 15°), mouillant bien les tubes et permettant d'utiliser l'éclairage préconisé par FORTIER (1) avec lequel il est facile de mesurer effectivement les différences de niveau au 1/100 mm près.

L'appareil de mesure des hauteurs était constitué par une vis micrométrique à tambour gradué en 1/200 mm, qui déplaçait verticalement un chariot sur lequel était monté un microscope de visée; en avant de l'objectif de celui-ci, et entre les deux tubes, était placé, dans une monture solidaire du microscope, un prisme à angle droit dont les faces servaient de miroirs donnant, par un réglage convenable de la distance du prisme aux tubes, des images confondues des deux tubes. La mesure des niveaux se réduisait donc à un simple déplacement vertical du chariot. Il était nécessaire de s'assurer directement, avec un microscope monté sur pivot, que les deux ménisques étaient bien, pour une différence de pression nulle, au même niveau; ce point vérifié, l'arête du prisme était amenée à être verticale en amenant à coïncider les deux traits lumineux donnés par les deux ménisques. Il suffisait de vérifier de temps à autre que la coïncidence se maintenait, le manomètre étant court-circuité par un robinet et tout écoulement arrêté.

Le même procédé d'éclairage était appliqué, avec moins de précision, à la mesure de $p_1 - p_{1m}$, où une précision de 1/20 mm suffisait amplement; la vis de mesure et son chariot étaient montés sur un tube vertical de cathétomètre permettant de viser successivement les deux tubes du manomètre.

Les tubes du manomètre utilisés pour la mesure de H avaient 9 mm de diamètre intérieur et étaient calibrés au 1/100 mm (tubes KPG Iena); les

(1) FORTIER, *Sur la mesure des pressions par la détermination photographique des niveaux atteints par les liquides dans les tubes*, C. R., t. 196, p. 2142, 1934.

ménisques avaient donc une faible courbure et étaient bien égaux, ce qui rendait la capillarité, sans effet nuisible.

Pour la mesure de $p_1 - p_{1m}$, au contraire, le tube du manomètre avait été choisi aussi petit que possible pour réduire le volume nuisible; ce diamètre était de l'ordre de 2 mm et le tube était légèrement conique : il en résultait une différence de niveau de quelques dixièmes de millimètre entre les deux ménisques pour une différence de pression nulle; l'amplitude des déplacements restant faible, cette différence de niveau pouvait être considérée comme une constante correctrice des lectures; elle n'intervenait d'ailleurs pas directement dans les mesures, car elle était négligeable par rapport à p_1 et, dans le calcul des variations de cette pression, elle s'éliminait.

3. — Réglage des pressions d'entrée et de sortie et de la pression p_{1m} .

a) Pression d'entrée.

La pression d'entrée était, dans les premiers appareils, la pression atmosphérique, moins la faible perte de charge dans les colonnes absorbant la vapeur d'eau et le gaz carbonique. La pression atmosphérique, sujette à des variations fort irrégulières, rendait impossible la détermination précise de H qui est utile pour l'étude de la variation du débit avec p_{10} .

La pression à l'amont du capillaire a été stabilisée en faisant précéder celui-ci d'un récipient maintenu à température constante (par immersion dans de l'eau placée dans un vase Dewar) et de grand volume ($3\,700\text{ cm}^3$); ce récipient était en relation avec l'atmosphère à travers un capillaire; la perte de charge, dans celui-ci, était mesurée au moyen d'un manomètre incliné; de cette façon, cet espace à l'amont du capillaire avait une constante de temps

$\tau = \frac{V}{K} \cdot \frac{h}{p_A}$ qui, pour une perte de charge de 3 cm de SO_4H_2 et un débit en volume K , de $1,7 \cdot 10^{-2}\text{ cm}^3/\text{s}$, était d'environ $\tau = \frac{3\,700}{1,7 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{3}{500} = 1\,200\text{ s}$. La constante de temps de l'espace compris entre le manomètre de mesure de H et le pointeau P_1 étant de l'ordre de 14 s, était négligeable devant la précédente.

L'effet de cet espace tampon est de ne laisser sentir à l'intérieur que les variations de pression atmosphérique de longue période devant τ (voir § 1, Etude d'un cas particulier, I).

Des robinets permettaient d'isoler le volume principal et, par suite, de rendre petite la constante de temps de cet espace amont; ceci permettait de déterminer rapidement la valeur d'équilibre et ainsi d'apprécier si l'appareil était en régime d'équilibre. Dans le fonctionnement avec de l'air l'appareil était d'ailleurs laissé, autant que possible, en marche continue, car la mise en équilibre de cet espace amont et surtout du pointeau P_1 demandait un assez long délai (voir § 4, ci-après).

Pour le fonctionnement avec un gaz autre que l'air, le volume tampon était placé en surpression; il était alimenté par un diaphragme B, fonctionnant en régime sonique; le capillaire le reliant à l'atmosphère servait alors

à la sortie de l'excès de gaz; l'excès de pression sur la pression atmosphérique était proportionnel au débit du diaphragme B qui, lui-même, était proportionnel à la pression dans son espace amont réglée, pour l'hydrogène, par un manodétendeur. Un diaphragme auxiliaire A, en série avec un autre capillaire, permettait, par le jeu de robinets, d'obtenir un remplissage rapide, après que tout l'appareil ait été vidé (*fig. 4*).

b) *Pression de sortie.*

La pression de sortie était réglée, d'une part, par le jeu d'un robinet limitant le débit de la pompe et, d'autre part, par un robinet pointeau très progressif, permettant une entrée dans l'espace aval d'air ou de gaz, celui-ci provenant alors du diaphragme auxiliaire A mentionné ci-dessus.

c) *Pression p_{1m} .*

La pression p_{1m} était celle régnant dans un récipient auxiliaire d'environ 1 000 cm³, maintenu à une température constante (pour la durée d'une expérience) par immersion dans un vase Dewar rempli d'eau. Ce récipient pouvait être réuni par un robinet à l'espace compris entre deux robinets (dont un pointeau) placés en série et reliés, d'un côté au diaphragme auxiliaire A, de l'autre à la pompe; la pression était amenée à la valeur p_{1m} correspondant à la valeur d'équilibre par le maniement des différents robinets. La valeur correcte de cette pression était atteinte lorsqu'en fermant le robinet court-circuitant le manomètre π , on n'observait aucun mouvement immédiatement décelable du niveau dans ce manomètre (la pression p_2 ayant sa valeur minimum); ceci indiquait une valeur très proche de l'équilibre, étant donné la faible valeur de la constante de temps de l'espace à l'amont de l'orifice.

4. — **Exécution de la mesure des variations de la pression amont p_1 .**

Le réglage du débit par le pointeau P_1 devait être fait quelques heures avant les mesures si l'appareil était inutilisé depuis quelque temps; une heure de délai suffisait si l'appareil fonctionnait déjà avec un autre débit. Cette attente était nécessaire pour que l'équilibre de température s'établisse dans la masse du pointeau; en effet, la détente du gaz produit un refroidissement qui modifie le réglage par variation de la surface de l'orifice d'écoulement et variation de la température initiale du gaz, laquelle est la température moyenne du support du pointeau. Cette température d'équilibre est inférieure à la température ambiante d'une certaine valeur dépendant du débit.

Pendant cette attente, le volume tampon amont se mettait à la pression d'équilibre, différant de ϵ de la pression atmosphérique (ϵ étant une dépression dans le fonctionnement avec de l'air, une surpression avec l'hydrogène); la valeur de ϵ était réglée à la valeur convenable par le choix du capillaire d'entrée, et par variation de la pression d'alimentation dans le cas de l'hydrogène. Pendant tout ce temps, la pompe maintenait le vide dans l'espace aval de P_1 .

Dans le cas de l'emploi de l'hydrogène et si l'appareil était resté inutilisé, ces opérations étaient précédées de deux vidages et remplissages de l'appareil au moyen des robinets prévus à cet effet; si l'appareil était resté en fonctionnement continu et, par suite, en surpression pour l'espace amont de P_1 , il suffisait de faire le vide dans l'espace aval. L'inverseur était placé dans la position voulue, la pression p_{1m} étant réglée comme il a été dit (§ 3).

La valeur η_0 donnée par le manomètre, après attente de quelques minutes pour avoir l'équilibre, permettait de corriger éventuellement p_{1m} pour avoir la valeur réelle en amont de l'orifice.

La pression p_2 était ensuite augmentée par manœuvre du robinet d'évacuation conduisant à la pompe; ce robinet servait à un réglage grossier de p_2 , le réglage précis étant fait par le pointeau P_2 . Le but de cette arrivée auxiliaire était, là aussi, l'obtention d'un équilibre rapide. Le manomètre mesurant la pression P_2 prenait celle-ci en amont du point où débouchait le courant de gaz provenant de P_2 , très près du tube de sortie de l'inverseur.

Il n'était nécessaire de mesurer la pression p_{1m} qu'une fois pour toutes au début; j'ai vérifié souvent que cette pression restait absolument constante, à quelques millièmes près, pendant la durée d'une mesure; toute variation systématique de p_{1m} serait d'ailleurs éliminée en même temps que toutes les autres au moyen de la mesure de vérification finale. La pression p_2 était mesurée avant et après la mesure de η ; les deux valeurs devaient être identiques, sinon l'expérience était recommencée.

La mesure de η était très accélérée par la connaissance de la constante de temps de l'appareil qui permettait d'obtenir, par extrapolation, la valeur d'équilibre. Pour cela, la lecture de η était faite à des intervalles réguliers égaux à une minute, les mesures de niveau étant faites dans un ordre bien défini, de façon que le décalage entre les mesures soit constant. La valeur d'équilibre η était ensuite déduite de ces mesures comme suit :

Au paragraphe 1, premier cas, a été donnée l'équation de variation de η avec le temps :

$$(I) \quad \eta - \bar{\eta} = (\eta_0 - \bar{\eta}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$$

au temps $t - \Delta t$, η avait la valeur $\eta - \Delta \eta - \bar{\eta} = (\eta_0 - \bar{\eta}) \exp\left(-\frac{t - \Delta t}{\tau}\right)$, donc :

$$\eta - \bar{\eta} = (\eta - \Delta \eta - \bar{\eta}) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$$

(équation analogue à (I) avec origine du temps en t); on en tire :

$$\eta_0 - \bar{\eta} = -\Delta \eta \frac{1}{\exp \frac{\Delta t}{\tau} - 1}.$$

On peut ainsi dresser un tableau du coefficient de $\Delta\eta$ suivant la valeur de Δt , après que τ ait été déterminé en suivant la marche du niveau manométrique à la mise en équilibre :

$\frac{1}{\exp \frac{\Delta t}{\tau} - 1}$	$\tau = 2 \text{ mn}$	$\tau = 32^s = \frac{32}{60} \text{ mn}$
$\Delta t = 1$	1,55	0,18
$\Delta t = 2$	0,58	
$\Delta t = 3$	0,30	
$\Delta t = 4$	0,15	
	Orifice B ₂ — air	Orifice B ₂ — H ₂

Ce tableau permet de déduire la correction à ajouter à η pour obtenir $\bar{\eta}$:

$$\bar{\eta} = \eta + \Delta\eta \frac{1}{\exp \frac{\Delta t}{\tau} - 1}.$$

Si aucune action perturbatrice n'intervient pour modifier la valeur de η , l'application de la formule à tous les intervalles de mesure doit conduire à la même valeur de η . Les mesures portaient sur un intervalle de 6 mn pour l'air, de 2 mn pour l'hydrogène, en moyenne; l'extrapolation était inutile pour l'hydrogène en général : η était constant pendant la série de lectures. La durée moyenne d'une mesure, pour chaque valeur de p_2 , était de l'ordre de 10 mn pour l'air, 5 mn pour l'hydrogène.

MESURES PRÉLIMINAIRES

A. — DÉTERMINATION DES CORRECTIONS DE PERTE DE CHARGE DANS L'APPAREIL DE MESURE DES DÉBITS

1. — Les derniers modèles d'appareils construits comportant des tubes de faible section pour réduire le volume nuisible, il en résultait une perte de charge parasite qui ne peut être négligée, dans la partie aval, lorsque la pression y devient très faible.

Les premiers modèles d'appareils de ce type (modèles I_A et I_B) comportaient, pour la jonction du support métallique à l'inverseur, deux tubes de nickel de 8/10 de mm environ de diamètre intérieur et de 3 cm de longueur chacun; les tubes de laiton maintenant le diaphragme étaient percés au diamètre de 4 mm sur une longueur de 10 cm environ (voir le schéma au chapitre III, *fig. 3*); la longueur des tubes de verre séparant l'inverseur des prises de pression était en amont de 9 cm; elle était en aval de 25 cm dans l'appareil I_A, et de 9 cm également dans l'appareil I_B; leur diamètre intérieur était de 2 mm. Dans l'appareil destiné à être utilisé définitivement (modèle II), les tubes de nickel étaient remplacés par deux tubes de cuivre de 2 cm de long chacun et de 2 mm de diamètre intérieur, ce qui diminuait évidemment les pertes de charge mais avait, de plus, l'avantage de rendre la variation de ces pertes de charge avec la pression moyenne beaucoup plus simple, en raison probablement de la plus grande homogénéité de la conduite.

La variation de la perte de charge avec la pression moyenne est donnée aux pressions utilisées par la formule de Knudsen, comme cela apparaît bien sur les mesures faites sur l'appareil II, dont la dispersion est suffisamment faible. Dans tous les appareils, la correction de perte de charge reste faible et des résultats même assez dispersés, comme ceux obtenus sur les appareils I, sont suffisants, sauf aux très basses pressions aval qu'il est nécessaire d'utiliser pour les très petits nombres de Reynolds (de l'ordre de 6 et au-dessous), où la précision de l'appareil du type II devient nécessaire.

2. — Rappel de la formule de Knudsen.

Cette formule donne, entre le débit en masse $\frac{dm}{dt}$, la pression moyenne p , la densité ρ à la pression p et la perte de charge Δp dans un tube capillaire, la relation :

$$p \cdot \Delta p = \left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{8 \eta_l l}{\pi r^4} \frac{dm}{dt},$$

où l et r sont la longueur et le rayon du tube et η_1 un coefficient de viscosité apparent donné par la relation :

$$\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta} + \frac{32}{3\pi} \sqrt{2\pi} \frac{p}{\rho} \frac{1}{r} \frac{1}{p} \frac{1 + \sqrt{\frac{\rho}{p}} \frac{2}{\eta} \frac{pr}}{1 + 1,24 \sqrt{\frac{\rho}{p}} \frac{2}{\eta} \frac{pr}}.$$

Le nombre $\sqrt{\frac{\rho}{p}} \frac{2}{\eta} \frac{pr}{1}$ est égal à $\frac{4}{10} pr$, donc de l'ordre de 40 pour $p = 1000$ baryes et $r = 0,1$ cm.

On peut donc prendre la dernière fraction égale à $\frac{1}{1,24}$ dans ce cas.

On en déduit pour l'air $\left(\frac{1}{\eta} = 5,5 \cdot 10^3\right)$, en exprimant les pressions en mm de mercure :

$$\left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{dm}{dt} = 5,24 \cdot 10^2 \frac{r^4}{l} p \left[5,5 \cdot 10^3 + \frac{150}{r} \frac{1}{p} \right] \Delta p,$$

ou encore en exprimant le rayon en millimètres :

$$\left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{dm}{dt} = 2,88 \cdot 10^2 \frac{r^4}{l} p \left[1 + \frac{0,51}{r} \frac{1}{2p} \right] \Delta p.$$

Le débit dans l'appareil est mesuré par la perte de charge, égale à H mm de SO_4H_2 , dans un capillaire de longueur l_0 , de rayon r_0 , la pression moyenne étant très voisine de la pression atmosphérique p_A ; on peut écrire, la perte de charge valant 0,136 H en mm de Hg :

$$\left(\frac{p_A}{\rho_A}\right) \frac{dm}{dt} = 2,88 \cdot 10^2 \frac{r_0^4}{l_0} p_A \cdot H \cdot 0,136,$$

d'où on déduit en négligeant la différence de température, donc prenant la même valeur de $\frac{p}{\rho}$:

$$\frac{H}{\Delta p (p_1 + p_2)} = \frac{l_0}{l} \left(\frac{r}{r_0}\right)^4 \frac{1}{0,136 \cdot 2 p_A} \left[1 + \frac{0,51}{r} \frac{1}{p_1 + p_2} \right],$$

en introduisant la somme $p_1 + p_2 = 2 p$ des pressions amont et aval; la quantité $k = \frac{H}{\Delta p (p_1 + p_2)}$ doit donc varier linéairement avec $\frac{1}{p_1 + p_2}$.

Si l'on remplace l'air par de l'hydrogène, le terme en $\frac{1}{(p_1 + p_2)}$ est

multiplié par le rapport $\frac{\gamma_{\text{air}}}{\gamma} = \frac{8,6}{17,2}$; le dernier facteur s'écrit alors :

$$1 + \frac{0,25}{r} \frac{1}{p_1 + p_2}.$$

3. — Formule pour la correction des mesures.

La connaissance de la valeur de k permet de corriger la valeur du rapport des pressions aval et amont : soit $x = \frac{p_2}{p_1}$ la valeur de ce rapport donnée par la mesure de p_2 et p_1 ; la pression vraie à l'aval de l'orifice est p'_2 et l'on a :

$$p'_2 - p_2 = \Delta p,$$

donc :

$$p'^2_2 - p^2_2 = \Delta p (p'_2 + p_2) = \frac{H}{k},$$

puisque $k = \frac{H}{\Delta p (p'_2 + p_2)}$; la vraie valeur de x est $x' \equiv \frac{p'_2}{p_1}$, d'où :

$$x'^2 - x^2 = \frac{H}{k p_1^2},$$

ou encore :

$$x'^2 - x^2 = \frac{A}{k p_1} \quad \text{en posant} \quad \frac{H}{p_1} = A,$$

ce rapport étant à très peu près constant pour un orifice donné, car il est proportionnel au débit en volume de celui-ci. Pour le calcul pratique des corrections, il faut tenir compte de la variation de k avec la pression moyenne; on a :

$$k = k_0 \left(1 + \frac{B}{p'_2 + p_2} \right) = k_0 \left(1 + \frac{B}{p_1 (x + x')} \right);$$

il est commode d'écrire la formule de correction sous la forme suivante :

$$x' - x = \frac{A}{k p_1 (x + x')} = \frac{100 A}{k_0 p_1} \cdot \frac{1}{\frac{100 B}{p_1} + 100 (x + x')};$$

le calcul de la correction se fait alors par approximations successives, très rapidement, à la règle à calcul.

La perte de charge amont est négligée, elle est beaucoup plus faible que la précédente en raison des grands rapports des pressions amont et aval utilisés.

4. — Mesure de k .

Les mesures de perte de charge ont été faites pour les quatre trajets possibles du gaz : les trajets (notés AA et BB) à travers l'inverseur seul (voir fig. 5 et fig. 1) et les trajets (notés AB et BA) correspondant aux deux sens

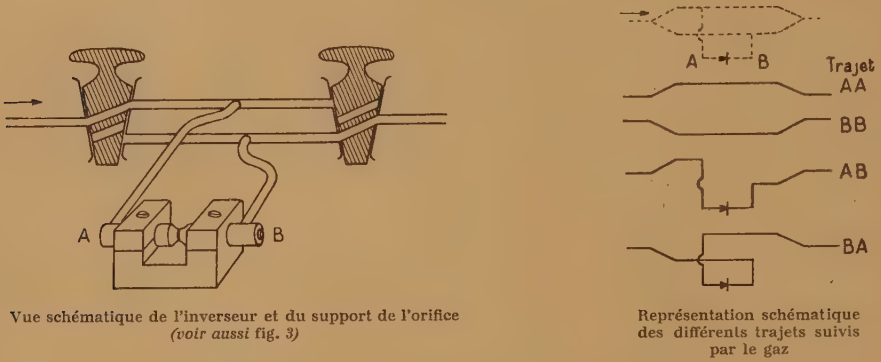


Fig. 5. — Coupe et schéma du système d'inversion de courant

de parcours du support du diaphragme (qui n'était évidemment pas en place pour ces mesures).

Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau I ci-contre.

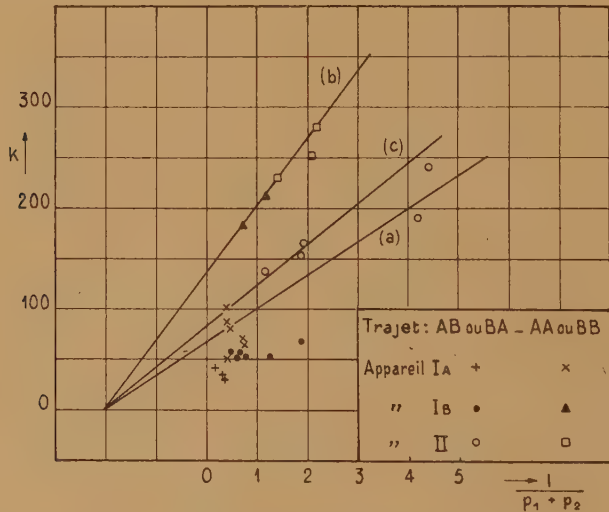


Fig. 6. — Variation du facteur de perte de charge k avec la pression moyenne

La précision des mesures va croissant d'une série à l'autre, par suite de nombreuses améliorations aux procédés de visée. Ceci est apparent, d'ailleurs, sur les graphiques où ont été portés k en fonction de $\frac{1}{(p_1 + p_2)}$; les points

TABEAU I

RÉSULTATS DES MESURES DE PERTES DE CHARGE DANS L'INVERSEUR

	NUMÉRO DE LA MESURE	NATURE DU TRAJET (voir fig. 5)	H (mm SO ₂ H ²)	p_1 (mm Hg)	p_2 (mm Hg)	Δp	$p_1 + p_2$	k	
								AB ou BA	AA ou BB
Mesures sur l'appareil I _A	1	AB	55	1,74	1,15	0,59	2,89	32	
	2	BB	»	1,37	1,15	0,22	2,52		100
	3	AA et BB	»	2,90	2,85	0,05 (?)	5,75		193 (?)
	4	AA et BB	»	1,40	1,15	0,25	2,55		86
	5	AB et BA	»	3,07	2,85	0,22	5,90	42	
	6	AB et BA	»	1,71	1,15	0,56	2,86	34	
	7	AA et BB	131	1,80	0,90	0,90	2,70		54
	8	»	»	1,50	0,80	0,70	2,30		82
	9	»	49	0,95	0,45	0,50	1,40		70
	10	»	19,8	0,81	0,58	0,22	1,38		65
	11	»	»	1,69	1,60	0,09 (?)	3,29		66 (?)
Mesures sur l'appareil I _B	1	AA	39	0,53	0,31	0,22	0,84		210
	2	BB	»	0,75	0,59	0,16	1,34		182
	3	BB	»	0,93	0,85	0,08 (?)	1,78		270 (?)
	4	AB	»	0,92	0,31	0,61	1,23	51,5	
	5	AB	»	1,06	0,59	0,47	1,65	50,0	
	6	AB	»	1,18	0,85	0,33	2,03	58	
	7	BB	9,35	0,65	0,60	0,05 (?)	1,25		150 (?)
	8	BB	»	0,24	0,15	0,09 (?)	0,39		260 (?)
	9	BA	»	0,75	0,63	0,12	1,38	56,5	
	10	BA	»	0,50	0,26	0,24	0,76	51,4	
	11	BA	»	0,40	0,15	0,25	0,55	68	
Mesures sur l'appareil II	1	BB	2,78	0,12	0,12	0,00 (?)	—	—	—
	2	AA	»	0,12	0,10	0,02 (?)	0,22		640 (?)
	3	AB	»	0,15	0,09	0,06	0,24	190	
	4	BA	»	0,14	0,09	0,05	0,23	240	
	5	BB	15,42	0,30	0,17	0,13	0,47		252
	6	AA	»	0,29	0,17	0,12	0,46		280
	7	AB	»	0,36	0,17	0,19	0,53	153	
	8	BA	»	0,35	0,17	0,18	0,52	165	
	9	AA	31,75	0,46	0,27	0,19	0,73		230
	10	BA	»	0,55	0,27	0,28	0,82	138	

NOTA. — Le signe (?), placé après les valeurs de Δp et de k , indique que Δp est trop petit, par rapport à la précision des mesures de p_1 et p_2 , pour que l'on puisse déterminer k avec une précision acceptable.

obtenus doivent se placer sur une droite, d'après la relation de Knudsen, qui s'écrit :

$$k = k_0 \left(1 + \frac{0,51}{r} \frac{1}{p_1 + p_2} \right),$$

où k_0 doit varier en raison inverse de la longueur des tubes.

Sur la *figure 6*, on voit que les points relatifs aux pertes de charge dans l'inverseur seul, donnés par les mesures I_B et II, se placent bien sur une droite (*b*) qui correspond à $B = 0,5$, soit $r = 1$ mm.

La droite (*a*) correspondant au même rayon et à une longueur de 35 cm (qui est celle des tubes de verre dans l'appareil I_A), au lieu de 18 cm dans les appareils I_B et II, passe bien au milieu des points correspondants aux mesures I_A et sera admise comme représentant ces mesures.

Les points représentant les mesures sur l'appareil II, pour les trajets BA-AB, se placent aussi sur une droite (*c*) correspondant, pour ce même diamètre, à une longueur de 28 cm qui est d'un ordre de grandeur satisfaisant.

Nous prendrons donc :

$$\text{Appareil } I_A \quad k_{AA}^{BB} = 66 \left(1 + \frac{0,5}{p_1 + p_2} \right) \quad (1) \quad (\text{droite } a);$$

$$\text{Appareils } I_B \text{ et II} \quad k_{AA}^{BB} = 135 \left(1 + \frac{0,5}{p_1 + p_2} \right) \quad (2) \quad (\text{droite } b);$$

$$\text{Appareil II} \quad k_{AB-BA} = 85 \left(1 + \frac{0,5}{p_1 + p_2} \right) \quad (3) \quad (\text{droite } c).$$

5. — Calcul de la valeur de k intervenant dans les corrections.

Appareils I_A et I_B

Dans les appareils I, le support du diaphragme comporte un tube de faible diamètre (0,4 mm) et nous admettons que c'est lui qui détermine la variation de k avec la pression moyenne; pour déterminer cette variation, il faut calculer la perte de charge dans le support seul. Pour une même pression moyenne, la perte de charge est proportionnelle à $\frac{1}{k}$; nous admettons que pour des trajets du type AB-BA, la perte de charge est la somme de celle dans le support proprement dit (Δp_s) et de celle dans les tubes de verre (Δp_{AA}), mesurée dans les expériences AA-BB; la perte de charge totale est donc $\Delta p_{AB} = \Delta p_s + \Delta p_{AA}$; les valeurs de k correspondantes sont k_s , k_{AA} , k_{AB} .

Pour la pression moyenne $\frac{2,9}{2}$ mm Hg, les mesures 1 et 6 (sur l'appareil I_A) et la droite (*a*) donnent :

$$\frac{\Delta p_{AB}}{\Delta p_{AA}} = \frac{k_{AA}}{k_{AB}} = \frac{80}{33} = 2,4,$$

d'où :

$$\frac{\Delta p_s}{\Delta p_{AA}} = 1,4 \quad \text{et} \quad k_s = \frac{80}{1,4} = 57;$$

pour la pression moyenne de $\frac{1,25}{2}$ mm Hg, les mesures 4 et 9 (sur l'appareil I_B) et la droite (b) donnent :

$$\frac{\Delta p_{AB}}{\Delta p_{AA}} = \frac{185}{54} = 3,4,$$

d'où :

$$\frac{\Delta p_s}{\Delta p_{AA}} = 2,4 \quad \text{et} \quad k_s = \frac{185}{2,4} = 77;$$

ces valeurs donnent, pour k_s , la loi de variation :

$$k_s = 42 \left(1 + \frac{1}{p_1 + p_2} \right),$$

soit une valeur du coefficient B égale à 1, correspondant à un rayon de 0,5 mm, au lieu de 0,4 mm, valeur nominale. Cet écart est réduit de moitié si l'on multiplie le deuxième terme de la formule de Knudsen par un coefficient voisin de 0,9, pour tenir compte de la différence d'action sur les molécules entre une paroi en métal et une en verre. De toute façon, une erreur de cet ordre de grandeur sur B a une influence négligeable sur les corrections et la valeur du coefficient B, donnée pour ces mesures, a été celle adoptée pour les corrections dans les appareils I_A et I_B. Nous prenons donc k de la forme $k = k_0 \left(1 + \frac{1}{p_1 + p_2} \right)$ et cherchons à déterminer k_0 .

a) Appareil I_A.

La partie de l'appareil à l'aval du diaphragme comprend la moitié du support et les deux tiers des canalisations de verre; la chute de pression $\Delta'p$, dans cette partie, vaut donc, à la pression moyenne de $\frac{2,9}{2}$ mm Hg :

$$\Delta'p = \frac{1}{2} \Delta p_s + \frac{2}{3} \Delta p_{AA} = \left(0,7 + \frac{2}{3} \right) \Delta p_{AA} = 1,4 \Delta p_{AA};$$

donc, à cette pression :

$$k = \frac{k_{AA}}{1,4}$$

ou, d'après (1), paragraphe 4 :

$$k_0 \left(1 + \frac{1}{2,9} \right) = \frac{66}{1,4} \left(1 + \frac{0,5}{2,9} \right),$$

d'où :

$$(A) \quad k_0 = 40 \quad \text{et} \quad k = 40 \left(1 + \frac{1}{p_1 + p_2} \right).$$

b) Appareil I_B.

Pour cet appareil symétrique $\Delta'p = \frac{1}{2} \Delta p_{AB}$, donc à la pression moyenne $\frac{1,25}{2}$ mm Hg, nous avons :

$$\Delta'p = 1,7 \Delta p_{AA} \quad \text{et} \quad k = \frac{k_{AA}}{1,7}$$

d'où, d'après (2), paragraphe 4 :

$$k_0 \left(1 + \frac{1}{1,25} \right) = \frac{135}{1,7} \left(1 + \frac{0,5}{1,25} \right),$$

d'où :

$$(B) \quad k_0 = 60 \quad \text{et} \quad k = 60 \left(1 + \frac{1}{p_1 + p_2} \right).$$

c) Appareil II.

Les pertes de charges, pour les trajets AA et AB, suivent la même loi de variation avec $p_1 + p_2$; nous aurons donc, sans hypothèses nouvelles :

$$k = 2 k_{AB}$$

soit, d'après (3), paragraphe 4 :

$$k = 170 \left(1 + \frac{0,5}{p_1 + p_2} \right);$$

lorsque le gaz est de l'hydrogène, nous aurons, d'après le paragraphe 2 :

$$k = 170 \left(1 + \frac{0,25}{p_1 + p_2} \right).$$

B. — MESURE DE LA CONSTANTE DE TEMPS DE L'ESPACE AMONT

La connaissance de la constante de temps de l'espace amont du diaphragme étudié est utile pour le calcul des corrections au cours des mesures de la pression amont p_1 . Une connaissance approximative est suffisante, car les corrections qu'elles permettent doivent rester toujours petites.

La mesure de cette constante de temps τ se faisait très simplement, en mesurant au chronomètre le temps nécessaire pour que le manomètre à acide

sulfurique, servant à la mesure des variations de p_1 , ait repris son niveau d'équilibre. Le déplacement observé était assez faible (quelques 1/10 mm) pour qu'il n'y ait pas à tenir compte de la variation du volume amont pendant la mesure.

Soit η la pression indiquée par le manomètre, $\Delta\eta$ l'écart par rapport à la valeur d'équilibre, $\Delta\eta_0$ la valeur initiale de cet écart; l'écart au temps t est :

$$\Delta\eta = \Delta\eta_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{ou} \quad \frac{t}{\tau} = 2,30 \times \log \frac{\Delta\eta_0}{\Delta\eta},$$

d'où τ en mesurant la pente de la droite obtenue, en portant $\log \frac{\Delta\eta_0}{\Delta\eta}$ en ordonnée, t en abscisse.

La valeur de $\Delta\eta_0$ suppose connue la position d'équilibre; celle-ci peut être calculée par extrapolation en utilisant une valeur approchée de τ ; cette valeur peut être ensuite corrigée en utilisant la valeur de τ déduite de la courbe tracée; au bout de quelques approximations successives, on obtient des points alignés donnant la valeur correcte de τ .

La valeur de $\tau = \frac{V}{k'}$ (voir chapitre IV B, § 1) est sensible aux variations de V qui peuvent être assez grandes, en valeur relative, pour des modifications légères de l'appareil (modification des joints), étant donné la petitesse du volume amont. D'autre part, τ dépend de k' , donc de la variation du débit avec la pression que les mesures mettent en évidence.

RÉSULTATS DES MESURES

I. — VARIATION DU DÉBIT AVEC LA PRESSION AVAL

Les mesures de débit, en régime sonique, faites antérieurement à ce travail ⁽¹⁾, avaient porté sur des orifices de l'ordre du millimètre au moins, la pression amont étant égale ou supérieure à la pression atmosphérique. Dans ces conditions, le débit mesuré en volume de gaz à la pression amont devient constant, avec une précision relative de l'ordre de 0,01 %, lorsque le rapport des pressions aval et amont $x = \frac{p_2}{p_1}$ devient inférieur à 0,2 environ ⁽²⁾. La diminution de débit, lorsque x varie de 0,2 à 0,53, est de 3 à 4 % (0,53 représente la valeur mesurée de x permettant un régime supersonique). Le débit décroît beaucoup plus rapidement ensuite, lorsque x devient inférieur à cette valeur 0,53, sans cependant qu'il y ait une démarcation nette entre les deux régions qu'elle détermine.

Cette loi de variation qui s'interprète, d'après STANTON, par une variation de la section minimum de l'écoulement, est encore valable pour les courbes de débits obtenues avec des orifices d'un diamètre de l'ordre du 1/10 mm, avec la pression atmosphérique en amont. Mais lorsque la pression amont est diminuée, la variation du débit, pour x inférieur à 0,2, devient mesurable; le débit n'est alors constant pour aucune valeur de x , sa variation est linéaire au degré de précision des mesures jusqu'à une valeur de x , qui est de l'ordre de 0,2 environ aux pressions relativement fortes, et qui reste supérieure à 0,07 environ pour les plus basses pressions utilisées.

La linéarité des courbes de débits permet de déterminer facilement la tangente à l'origine (pour $x = 0$) à partir des courbes expérimentales, où les valeurs de x ne descendent pas au-dessous de 0,01. Nous poserons donc, pour x petit, $\frac{Q}{Q_m} = 1 - \alpha (x - x_m)$ (où Q et Q_m représentent le débit mesuré pour la valeur x et la valeur minimum x_m). En toute rigueur, la pente à l'origine, pour le débit relatif rapporté à $x = 0$, est donnée par $\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha x_m} x$, mais le terme $1 + \alpha x_m$ peut être, à la précision des expériences, confondu avec 1. Cette pente α est un paramètre commode pour caractériser la variation de débit à pression amont constante ⁽³⁾ pour des orifices et des gaz divers.

(1) Voir notes de l'introduction.

(2) Pour un orifice en mince paroi, de forme tronconique, tel que ceux étudiés ici.

(3) D'après le principe même de la méthode de mesure, la pression amont varie légèrement, mais l'effet produit est du deuxième ordre.

Le résultat du dépouillement des expériences faites est rassemblé dans le tableau II; le paramètre choisi est non la pression amont, mais le nombre de Reynolds R (voir appendice, fin du chapitre); les expériences faites avec les orifices B_1 , avec l'air, et B_2 , avec air et hydrogène, sont les seules dont le nombre et la précision soient suffisantes et qui portent sur des orifices suffisamment

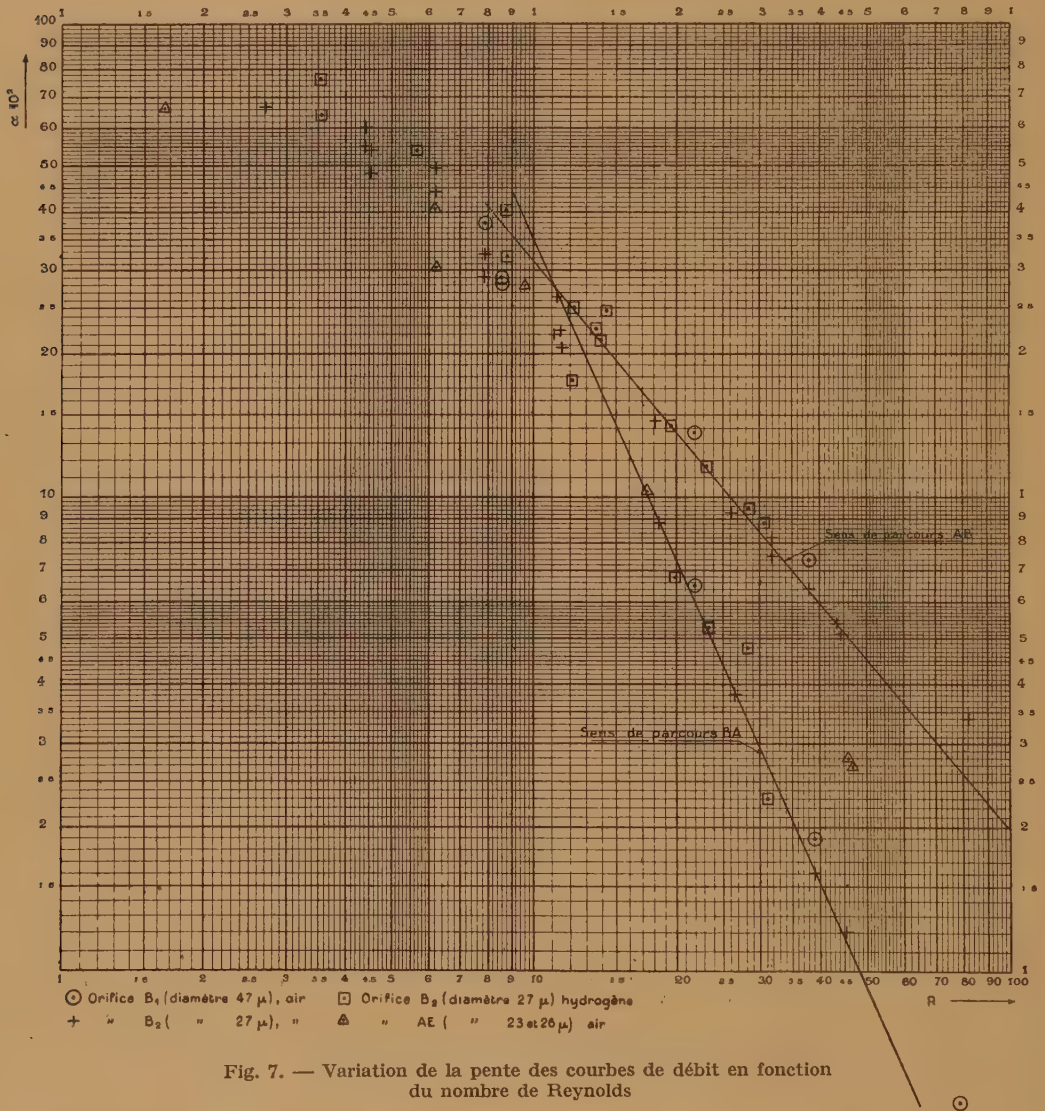


Fig. 7. — Variation de la pente des courbes de débit en fonction du nombre de Reynolds

bien définis et semblables, pour que leur comparaison puisse présenter de l'intérêt. La courbe de la figure 7, tracée en coordonnées logarithmiques donne, pour ces orifices, la valeur de α en fonction de R ; les valeurs correspondant à un même sens de parcours, pour l'air et l'hydrogène, se placent sur la même courbe (les points relatifs à B_1 présentent un léger écart systématique dû probablement à la similitude imparfaite des deux orifices B_1 et B_2). Ce résultat indique que la variation de α manifeste l'influence de la grandeur du libre parcours

TABLEAU II

VARIATION DU DÉBIT AVEC LA PRESSION AVAL

Orifice A, $d = 80 \mu$					Orifice AD, $d = 93 \mu$				
Sens BA					Sens AB				
N° de l'expérience	(5)				N°	(81)	(125)		
R	180				R	450	105		
$10^2 \alpha$	0,8				$10^2 \alpha$	0,4	0,7		

Orifice AE, $d = 24,5 \mu$ (ellipse d'axes 23 et 26 μ)												
Sens BA					Sens AB							
N°	(143)	(150)	(161)	(167)	N°	(171)	(181)	(203)	(207)	(215)	(228)	(236)
R	310	180	91	55	R	47	46,5	9,6	6,3	6,2	1,65	17,4
$10^2 \alpha$	0,3	0,4	0,6	0,8	$10^2 \alpha$	2,7	2,8	28,2	30,6	41,2	67	10,4

Orifice B ₁ , $d = 47 \mu$											
Sens BA						Sens AB					
N°	(297)	(246)	(273)	(262)	(310)	N°	(282)	(241)	(270)	(255)	(316)
R	82	39,2	22	8,6	7,9	R	82,0	38,4	22	8,6	7,9
$10^2 \alpha$	0,5	1,9	6,5	28	38	$10^2 \alpha$	3,4	7,4	13,8	28	38

Orifice B ₂ (air), $d = 27 \mu$											
Sens BA											
N°	(352)	(449)	(374)	(381)	(408)	(470)	(414)	(476)	(442)	(490)	(494)
R	45,5	39	26,8	18,3	11,4	11,2	7,8	6,25	4,5	4,4	2,7
$10^2 \alpha$	1,2	1,6	3,8	8,8	20,6	22	29	43	48	60	66

Sens AB														
N°	(342)	(323)	(458)	(640)	(645)	(365)	(390)	(399)	(464)	(426)	(481)	(437)	(486)	(499)
R	44,5	44	38,2	32	32	26,5	18,3	11,4	11,2	7,8	6,25	4,5	4,4	2,7
$10^2 \alpha$	5,2	5,4	6,4	7,5	8,2	9,2	14,6	22,2	26,6	32,5	49,6	54	55	66

Orifice B ₂ (hydrogène)									
Sens BA									
N°	(515)	(510)	(544)	(567)	(626)	(574)	(589)	(608)	(614)
R	31,5	28,0	23,5	20	13,9	12,3	8,8	5,6	3,5
$10^2 \alpha$	2,3	4,8	5,3	6,8	21,2	17,8	32	54	64

Sens AB										
N°	(530)	(503)	(551)	(557)	(636)	(631)	(582)	(596)	(600)	(619)
R	30,5	28,8	23,2	19,7	14,3	13,8	12,3	8,7	5,6	3,5
$10^2 \alpha$	8,8	9,4	11,7	14,2	24,8	22,4	25	40	54	76

NOTA. — R nombre de Reynolds $R = 0,94 \frac{d}{l_0}$ (l_0 libre parcours dans le gaz en repos à l'amont, d diamètre de la section minimum de l'orifice).

α pente à l'origine de la courbe de débit.

moyen sur les conditions de l'écoulement et que la similitude des écoulements reste suffisante pour que ce paramètre puisse les caractériser. Ce graphique fait apparaître deux régions distinctes séparées approximativement par la valeur $R = 10$; au-dessous de cette valeur, il n'y a plus de différence entre les deux sens d'écoulement (nous verrons plus loin que le débit est alors le même dans les deux sens pour $x = 0$). Pour R très petit, α doit tendre vers la valeur 1 qu'il a dans le régime d'écoulement moléculaire; en effet, dans

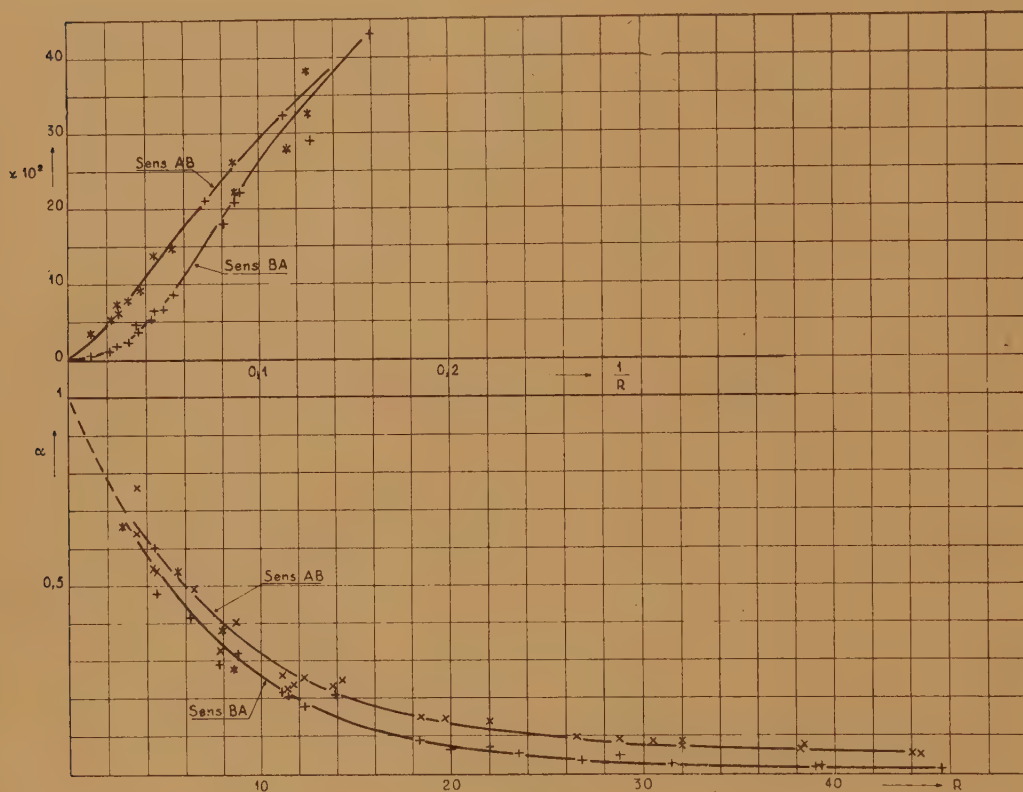


Fig. 8 et 9

celui-ci, le débit en masse est proportionnel à $p_1 - p_2$; le débit en volume, mesuré à la pression amont, est donc proportionnel à $\frac{(p_1 - p_2)}{p_1} = 1 - \alpha$.

Pour mieux voir cette variation de α pour R très petit et sa variation pour R très grand, les valeurs de ce coefficient ont été également représentées en prenant des coordonnées ordinaires, en portant en abscisse R et $\frac{1}{R}$ (fig. 8 et 9). La première représentation montre bien, malgré la dispersion des mesures aux petites pressions, que la variation moyenne de α correspond à une limite égale à 1. La deuxième représentation met bien en évidence l'avantage qu'il y a, au point de vue pratique, à utiliser le sens d'écoulement BA, c'est-à-dire un orifice divergent, lorsque l'orifice est utilisé comme régulateur de débit.

La représentation logarithmique montre que pour $R > 10$, α est bien représenté par une formule de la forme $\alpha = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-n}$; le calcul de n et R_0 a été fait en déterminant la droite par la méthode des moindres carrés ; on a donc :

$$\alpha_{AB} = \left(\frac{R}{3,85}\right)^{-1,20}, \quad \alpha_{BA} = \left(\frac{R}{6,25}\right)^{-2,26}.$$

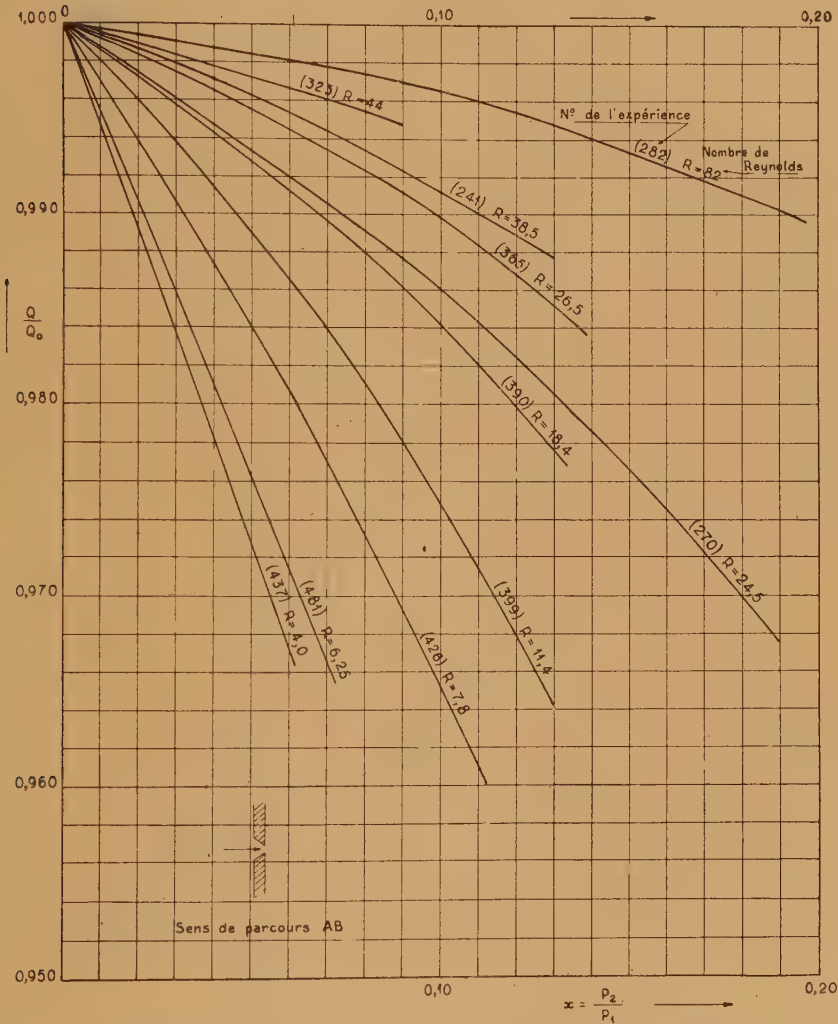


Fig. 10. — Courbes de débit pour le sens de parcours AB (convergent)

Pour rassembler d'une manière commode les résultats obtenus, j'ai représenté sur un même graphique les différentes courbes de débit corrigées de façon à prendre, pour débit de référence, celui correspondant à $x = 0$, la cote de chaque courbe étant le nombre de Reynolds ; les courbes correspondant aux divers orifices semblent bien ne former qu'une même famille ; le débit relatif ne dépend donc que de R et x (fig. 10 et 11).

APPENDICE

Le nombre de Reynolds est égal à $\frac{v d}{\nu}$, où v est la vitesse en un point de l'écoulement, d une longueur caractéristique et ν la viscosité cinématique

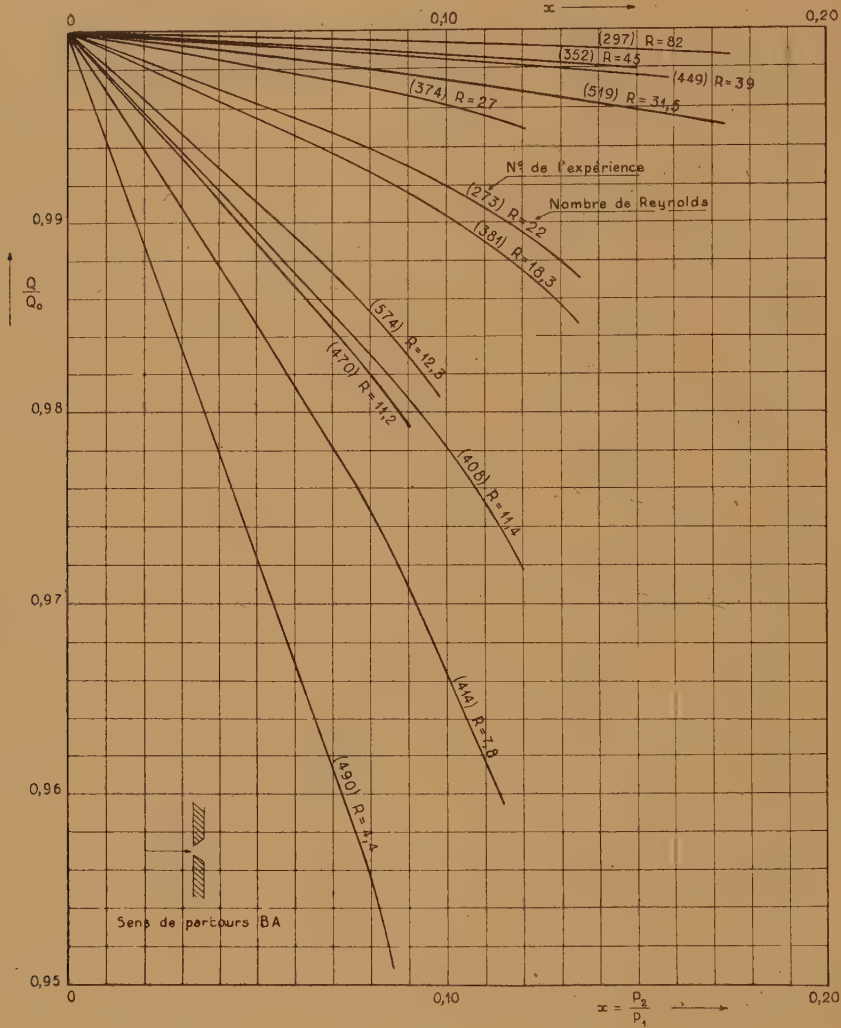


Fig. 11. — Courbe de débit pour le sens de parcours BA (divergent)

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$. La théorie cinétique ⁽¹⁾ donne pour μ la valeur :

$$\mu = 0,5 \frac{m \bar{c}}{\sqrt{2 \pi \sigma^2}}$$

($\bar{c}$ vitesse moyenne des molécules, m masse et σ diamètre d'une molécule)

(1) JEANS, *Théorie dynamique des gaz*, pp. 37, 137 et 320.

ou, en introduisant le libre parcours moyen de Maxwell :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2} \pi n \sigma^2}, \quad \mu = 0,5 \, mn\bar{c}l,$$

d'où :

$$v = 0,5 \, \bar{c}l,$$

puisque $\rho = mn$;

et, par suite :

$$R = 2 \frac{v}{c} \cdot \frac{d}{l}.$$

La vitesse du son est proportionnelle à c ; on a, en effet :

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{3} \rho C^2 \quad (C \text{ vitesse quadratique moyenne}),$$

et enfin $\bar{c} = 0,921 \, C$, d'où :

$$a = \sqrt{\frac{\gamma}{3} \frac{\bar{c}}{0,921}},$$

soit, pour un gaz diatomique ($\gamma = 1,4$) :

$$a = 0,742 \, \bar{c}.$$

En définitive, on peut donc écrire :

$$R = 1,48 \frac{v}{a} \cdot \frac{d}{l}.$$

Si, dans le cas étudié ici, on prend comme vitesse de référence la vitesse $v = a$ à la section minimum, le libre parcours l doit être celui dans le gaz au même endroit. Dans l'hypothèse de la détente adiabatique d'un gaz parfait, ce libre parcours est dans un rapport fixe avec celui existant dans l'espace amont car le produit ρl est constant pour un gaz donné ; donc, si ρ_0 et l_0 sont les valeurs relatives à l'espace amont, $l = \frac{\rho_0}{\rho} l_0$ et $\frac{\rho}{\rho_0}$ a pour valeur 0,636 ⁽¹⁾.

Le nombre de Reynolds sera donc défini par la relation :

$$R = 1,48 \frac{l}{l_0} \frac{d}{l} = 0,94 \frac{d}{l_0};$$

c'est donc, à très peu de chose près, le rapport $\frac{d}{l}$ qui intervient d'après l'analyse

(1) SANTON, *loc. cit.*

dimensionnelle (chapitre premier). La valeur de l_0 se déduit facilement, en assimilant le gaz à un gaz parfait, de la valeur donnée dans les tables pour les conditions normales de température et de pression.

Pour une température de 20°, on obtient ainsi les formules pratiques $R = \frac{dp}{47}$ pour l'air, $R = \frac{dp}{90}$ pour l'hydrogène, d étant exprimé en microns et p en millimètres de mercure.

CHAPITRE VII

RÉSULTATS DES MESURES

II. — VARIATION DU DÉBIT EN VOLUME

AVEC LA PRESSION AMONT POUR UNE PRESSION NULLE EN AVAL

Le débit de l'orifice mesuré en volume de gaz, à la température et à la pression amont, doit être indépendant de celle-ci pour un rapport des pressions amont et aval donné si l'on néglige l'influence du libre parcours moyen dans le gaz. D'après les résultats du chapitre précédent ceci ne se vérifie pas pour une valeur de $x = \frac{p_2}{p_1}$ différente de zéro; l'expérience montre que cela n'est pas vrai non plus si l'on compare les débits pour une pression aval nulle, c'est-à-dire les débits extrapolés pour $x = 0$.

Cette comparaison comprend tout d'abord, pour chaque orifice, l'étude de la variation relative du débit pour $x = 0$, par rapport à un débit pris pour référence et qui sera celui correspondant à une pression amont telle que, pour chaque orifice, le nombre de Reynolds soit égal à 26; nous verrons que, pour des écoulements semblables, cette variation ne dépend que du nombre de Reynolds. Cette étude est complétée par la comparaison des débits en valeur absolue pour $R = 26$; les valeurs des coefficients de débits obtenues sont égales à la précision des expériences.

A. — Notations et formules utilisées.

Les courbes de débit du chapitre précédent donnent le débit relatif par rapport au débit correspondant à la valeur minimum x_m de x ; on avait posé :

$$\frac{Q}{Q_m} = 1 - \alpha (x - x_m);$$

donc le débit Q_0 pour $x = 0$ est donné par $Q_0 = Q_m (1 + \alpha x_m)$.

Le rapport entre les valeurs de Q_m pour les différentes pressions amont se déduit des valeurs de H , p_1 et p_A par les formules établies plus loin; Q_m pourra être ainsi comparé à une valeur Q_{m_0} correspondant à une valeur p_{10} et

pour laquelle x et x_m auront les valeurs x_0 et x_{m_0} si Q_{00} est la valeur de Q_0 correspondante; on aura :

$$\frac{Q_0}{Q_{00}} = \frac{Q_m}{Q_{m_0}} \frac{1 + \alpha x_m}{1 + \alpha_0 x_{m_0}} \neq \frac{Q_m}{Q_{m_0}} (1 + \alpha x_m - \alpha_0 x_{m_0});$$

cette correction n'est pas négligeable, car elle intervient dans le calcul de la différence AB-BA des débits dans les deux sens de parcours.

La température de l'écoulement est légèrement différente d'une série d'expériences à l'autre; pour avoir des mesures comparables entre elles nous sommes amenés à poser :

$$Q_m = \frac{Q_{(p,T)}^T}{Q_{t(p,T)}^T},$$

où les notations $Q_{(p,T)}^{T'}$ et $Q_{t(p,T)}^{T'}$ représentent respectivement, pour la valeur donnée, x_m de x , le débit réel et le débit théorique d'un orifice à la température T' , le débit étant mesuré en volume de gaz amené à la pression p et à la température T . $Q_{t(p,T)}^T$ représente donc le débit théorique de l'orifice à la température T mesuré à la même température et à la pression amont p_1 . Par débit théorique, il faut entendre celui résultant de la formule de Saint-Venant, débit qui est donc indépendant de p_1 mais qui dépend de T . (Pour simplifier l'écriture, on pourra donc écrire, dans le cas où $T = T'$, et $p = p_1$, Q_t^T au lieu de $Q_{t(p,T)}^T$.) Cette définition de Q_m fait de ce nombre, ainsi que de Q , un débit relatif, le débit théorique étant pris pour unité. Ceci ne change rien aux résultats du chapitre précédent puisque le débit théorique est constant pendant une série de mesures, mais permet de corriger les valeurs de Q_m des écarts provenant de la variation de T d'une série de mesures à l'autre; elle aurait permis, en faisant varier T dans un large intervalle, de mettre en évidence l'écart qui est à prévoir (par suite de l'influence du libre parcours) entre la variation théorique proportionnelle à $\sqrt{T}$ ⁽¹⁾ et la variation réelle; dans les calculs qui vont suivre, nous considérons cet écart comme une correction négligeable en raison de la faible variation relative des températures et admettons donc que Q_m ne dépend pas de la température.

Le débit théorique est $Q_t^T = \frac{a \rho s}{\rho_0}$, où s représente la section minimum du jet, a la vitesse du son et ρ la densité du gaz au niveau de cette section; ces deux dernières grandeurs sont liées aux valeurs a_0 et ρ_0 qu'elles ont dans l'espace amont par les relations ⁽²⁾ :

$$a = 0,912 a_0 \quad \text{et} \quad \rho = 0,636 \rho_0;$$

donc :

$$Q_t^T = 0,912 \cdot 0,636 \cdot a_0 s;$$

à 15° C on a donc :

$$Q_t^{288} = 1,970 \cdot 10^4 s \text{ (s en cm}^2\text{)},$$

(1) T représente la valeur de la température dans l'échelle thermodynamique.

(2) Ouvrages de A. FOCH et SANTON, cités dans l'introduction.

et à une température T :

$$Q_t^T = Q_t^{288} \sqrt{\frac{T}{288}}.$$

Nous ferons encore l'hypothèse supplémentaire que la section s , intervenant dans Q_t , est la section minimum de l'orifice; le rapport Q_m représente donc le coefficient de débit du jet pour la valeur x_m , et l'étude de la variation de Q_0 représente donc en somme la variation de ce coefficient de débit pour $x = 0$, variation qui peut faire intervenir à la fois une variation de la section minimum et de la répartition des vitesses dans cette section. Nos mesures nous donnent également, comme nous le verrons plus loin, la valeur absolue de ce coefficient de débit, mais avec une précision absolue plus faible que celle avec laquelle sont connues ses variations.

Le débit $Q_{(p,T)}^T$ se déduit de la valeur $Q_{(p_A,0^0)}^T$ du même débit mesuré en volume de gaz, à la pression moyenne p_A et à la température 0^0C du capillaire C, en appliquant l'équation des gaz parfaits, ce qui n'introduit que des erreurs bien inférieures au millième, négligeables ici :

$$Q_{(p,T)}^T = Q_{(p_A,0^0)}^T \cdot \frac{p_A}{p_1} \cdot \frac{T}{273};$$

le débit $Q_{(p_A,0^0)}^T$ est proportionnel, d'après la formule de Meyer, à $\frac{1}{\rho} [p_A^2 - (p_A - H)^2]$, où ρ est la densité moyenne du gaz dans le capillaire; on peut donc écrire :

$$Q_{(p_A,0^0)}^T = KH \left(1 - \frac{H}{2p_A} \right),$$

où K est une constante, et :

$$Q_{(p,T)}^T = K \frac{p_A}{p_1} H \left(1 - \frac{H}{2p_A} \right) \frac{T}{273};$$

donc :

$$Q_m = \frac{K}{Q_t^T} \frac{p_A}{p_1} H \left(1 - \frac{H}{2p_A} \right) \frac{T}{273},$$

et :

$$\frac{Q_m}{Q_{m_0}} = \frac{p_A}{p_{A_0}} \frac{p_{10}}{p_1} \cdot \frac{H}{H_0} \left(1 + \frac{H_0 - H}{2p_A} \right) \sqrt{\frac{T}{T_0}}.$$

Les deux derniers facteurs sont des termes correctifs; le premier s'écrit $1 + \frac{H_0 - H}{10^4}$ en exprimant H en millimètres d'acide sulfurique et en prenant 5 000 mm comme valeur approchée pour p_A . Les autres facteurs doivent encore être multipliés par des facteurs tenant compte de l'influence de la température,

dans les mesures de p_1 et p_{10} (manomètre à mercure), et de H et H_0 (manomètre à acide sulfurique); les mesures de p_A et p_{A_0} , faites sur un baromètre anéroïde compensé, n'introduisent pas de correction de température. Ce facteur, tenant compte des dilatations des liquides manométriques, est :

$$(1 - 0,54 \cdot \Delta T \cdot 10^{-3}) (1 - 0,17 \cdot \Delta T \cdot 10^{-3}) \neq 1 - 0,7 \Delta T \cdot 10^{-3}, \text{ où } \Delta T = T - T_0;$$

nous écrirons, d'autre part :

$$\sqrt{\frac{T}{T_0}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} \neq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta T}{288} = 1 + 1,7 \Delta T \cdot 10^{-3},$$

en prenant 288° pour valeur moyenne de T_0 . Le facteur de température total est donc :

$$1 + \Delta T \cdot 10^{-3}.$$

B. — Variation relative du coefficient de débit avec la pression amont.

Le tableau III résume l'ensemble des mesures dont les résultats ont été utilisés. Sur ce tableau figurent les valeurs de la pression amont p_1 , de la perte de charge H dans le capillaire, de la température de l'orifice, et de la pression atmosphérique, d'où l'on peut déduire la valeur du rapport $\frac{Q_m}{Q_{m_0}}$ du débit pour un rapport des pressions x_m , au débit pour un rapport x_{m_0} observé dans l'expérience dont le débit a été pris pour unité. Enfin, sur ce tableau, figure la valeur de la correction αx_m qui, comme nous l'avons vu plus haut, permet de calculer le rapport des débits $y' = \frac{Q_0}{Q_{00}}$ correspondant à une pression aval nulle.

La valeur de ce débit relatif y'_{AB} , calculé pour le sens d'écoulement AB, figure en outre dans le tableau IV.

Dans le tableau III, figure également la valeur de la différence relative de débit observée quand on inverse le sens de parcours du gaz pour un rapport de pression x_m ; ces nombres permettent de calculer, en tenant compte de la correction αx_m pour les deux sens de parcours, la différence relative de débit $y'_{AB} - y'_{BA}$ qui serait observée pour une pression aval nulle.

La représentation graphique des valeurs de y'_{AB} en fonction du nombre de Reynolds R indique une analogie très grande de variation pour les différents orifices et les différents gaz; nous avons donc été amenés à rapprocher ces résultats en multipliant les valeurs de ces débits relatifs par des coefficients convenables, de façon à prendre pour tous, comme débit de référence, le débit dans le sens AB pour la valeur $R = 26$ (cette valeur du nombre de Reynolds ayant été choisie parce qu'elle correspond à la valeur moyenne pour laquelle ont été faites les mesures de débit absolu dont il est parlé plus loin).

TABLEAU III

NUMÉRO DE L'EXPÉRIENCE	T ° C	P ₁ mm Hg	H mm SO ₂ H ² (¹)	P _A mm Hg	$\frac{Q_m}{Q_{m_0}}$		$\alpha x_m \cdot 10^3$		$y' = \frac{Q_0}{Q_{00}}$		$y'_{AB} - y'_{BA} \times 10^3$	R = 1,5 $\frac{d}{l}$
					sens AB (²)	sens BA (²)	AB	BA	sens AB y' _{AB}	sens BA y' _{BA}		
Orifice AE - air												
236	12,5	34,07	56,01	751,0	1			0,7		1		17,4
203	14,5	18,35	26,13	770,3	0,893			3,0		0,895		9,6
207	14,7	11,91	15,41	774,3	0,817			7,5		0,822		6,3
209	15,5	11,66	15,32	768,0	0,823			8,9		0,830		6,2
215	15,5	11,66	15,75	759,5	0,837			6,2		0,842		6,2
228	12,5	3,21	3,40	751,8	0,648			52		0,682		1,65
Orifice B ₁ - air												
241	22,6	39,17	55,58	756,0	1	— 18,8	3,6	1,0	1	0,979	21,4	38,4
255	21,1	8,67	9,80	757,6	0,8016	— 1,1	14,7	14,2	0,81	0,809	1,3	8,6
270	21,7	22,07	29,47	756,8	0,9436	— 10,8	4,8	2,4	0,945	0,932	12,5	22
282	20,4	82,90	125,53	757,0	1,058	— 32,4	0,5	0	1,055	1,019	36,3	82,0
310	19,0	8,02	8,95	759,3	+ 5,4	0,7908	10	10,5	0,804	0,796	4,8	7,9
Orifice B ₂ - air												
342	22,2	78,1	36,59	753,8	1	— 16,0	0,7	0,2	1	0,98	16,5	44,5
365	23,0	46,7	20,97	752,0	0,959	— 8,5	1,3	0,5	0,960	0,951	8,9	26,0
381	22,4	32,5	13,83	758,0	+ 6,4	0,916	2,9	1,6	0,924	0,917	7,0	18,3
399	22,9	20,0	8,00	759,2	0,863	— 3,4	2,8	2,3	0,865	0,862	3,3	11,4
414	21,6	13,8	5,25	762,9	+ 4,8	0,824	3,4	3,1	0,830	0,826	3,8	7,8
437	19,6	7,9	2,70	754,5	0,730	— 11,8	8,0	14,0	0,735	0,731	4,2	4,5
449	19,2	68,5	32,21	754,0	+ 16,2	1,001	0,6	0,15	1,016	1,001	15,5	39
464	18,7	19,7	7,31	753,7	0,7935	— 3,1	2,1	1,8	0,795	0,792	2,7	11,2
476	19,2	11,0	4,08	760,0	+ 6,2	0,798	2,5	3,4	0,804	0,800	4,2	6,3
486	20,0	7,8	2,78	760,5	0,769	— 1,5	4,4	3,0	0,772	0,770	2,2	4,4
494	20,4	4,8	1,55	760,0	+ 4,0	0,696	2,4	2,4	0,700	0,697	2,8	2,7
640	9,2	56,9	25,99	761,5	0,976		0,5		0,976			32
Orifice B ₂ - hydrogène												
530	12,7	98,1	84,80	756,1	1	— 14,7	0,9	0,5	1	0,985	15,1	30,5
503	21,4	93,1	78,60	763,6	0,978	— 13,2	0,9	0,5	0,978	0,965	13,3	28,8
544	11,9	75,9	62,39	762,9	+ 11,4	0,962	1,1	0,5	0,973	0,962	11,5	23,2
557	10,1	64,0	51,53	771,2	0,956	— 9,4	1,4	0,6	0,956	0,947	9,6	19,7
574	10,3	39,7	30,42	771,7	+ 6,0	0,912	2,8	1,9	0,919	0,913	6,3	12,3
589	9,9	28,3	20,27	766,0	+ 5,2	0,847	4,8	4,5	0,855	0,850	4,7	8,8
600	10,0	18,2	12,12	765,8	0,787	— 1,2	8,6	7,2	0,793	0,791	2,1	5,6
619	9,4	11,2	6,89	769,8	0,745	— 1,4	15,2	11,6	0,756	0,752	3,7	3,5
626	10,2	45,1	34,52	769,8	+ 7,1	0,909	2,4	2,3	0,917	0,910	6,6	13,9
636	9,3	46,3	35,84	762,8	0,910		2,7		0,912			14,3

(1) Le diamètre du capillaire était (en $\frac{1}{100}$ mm) de 27 pour les trois premières expériences, de 13 pour les suivantes, avec l'orifice AE, et de 20 pour toutes les autres.

(2) Le nombre précédé de + ou —, dans la colonne $\frac{Q_m}{Q_{m_0}}$, indique la variation de débit observée en changeant le sens de parcours, la variation étant indiquée en millièmes du débit indiqué dans l'autre colonne.

TABLEAU IV

COEFFICIENTS DE DÉBIT
RELATIFS POUR UNE PRESSION NULLE EN AVAL (y)
et variation avec le sens de parcours (ε)

NUMÉRO de L'EXPÉRIENCE	R	y'_{AB}	y_{AB}	y_{BA}	$10^3 \varepsilon$
B ₁ - air					
282	82,0	1,055	1,100	1,060	35,4
241	38,4	1	1,040	1,018	21,4
	<u>26</u>	0,960	1		
270	22,0	0,945	0,984	0,972	12,9
258	8,6	0,810	0,844	0,843	1,45
310	7,9	0,801	0,835	0,831	5,3
B ₂ - air					
342	44,5	1	1,041	1,024	16,5
449	38,2	1,016	1,058	1,042	15,2
640	32,0	0,976	1,016	1,003	12,8
	<u>26</u>	0,960	1		
365	26,0	0,960	1,000	0,991	9,3
381	18,3	0,924	0,963	0,956	7,6
399	11,4	0,865	0,901	0,898	3,8
464	11,2	0,795	0,828	0,825	3,3
414	7,8	0,830	0,865	0,861	4,6
476	6,3	0,804	0,838	0,834	5,2
437	4,5	0,735	0,766	0,762	5,7
486	4,4	0,772	0,804	0,801	2,85
494	2,7	0,700	0,729	0,726	4
B ₂ - hydrogène					
530	30,5	1	1,016	1,000	15,1
503	28,8	0,978	0,994	0,981	13,7
	<u>26</u>	0,984	1		
544	23,2	0,973	0,989	0,977	11,8
557	19,7	0,956	0,972	0,962	10,0
636	14,3	0,912	0,927	0,920	8,0
626	13,8	0,917	0,932	0,926	7,2
574	12,3	0,919	0,934	0,928	6,8
589	8,7	0,855	0,870	0,865	5,5
600	5,6	0,793	0,807	0,805	2,65
619	3,5	0,756	0,768	0,765	4,9
AE - air					
236	17,4	1	0,95		
203	9,6	0,895	0,850		
207	6,3	0,822	0,780		
209	6,2	0,830	0,790		
215	6,2	0,842	0,800		
228	1,65	0,682	0,645		

Les valeurs de débits relatifs pour les deux sens de parcours, désignés par les symboles y_{AB} et y_{BA} , figurent dans le tableau IV.

Ces valeurs ont permis la représentation graphique des figures 12 et 13.

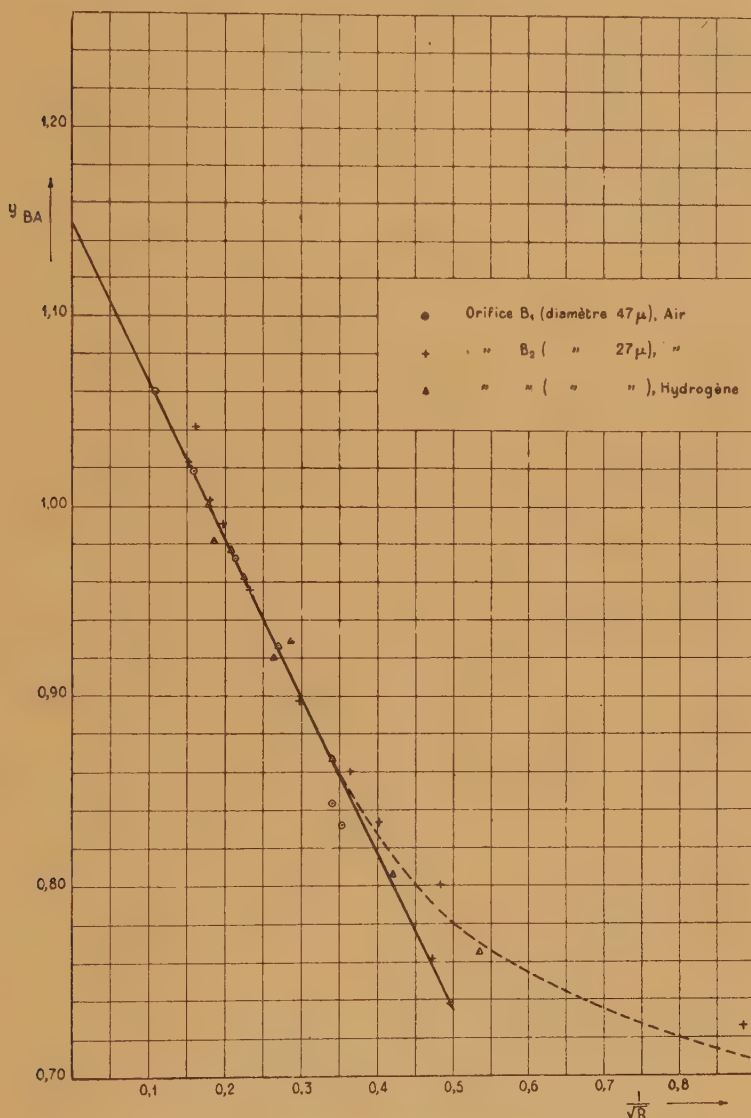


Fig. 12. — Coefficient de débit en fonction de $\frac{1}{\sqrt{R}}$

Sur la figure 12, les points correspondent aux valeurs de y_{BA} en fonction de $\frac{1}{\sqrt{R}}$ et, sur la figure 13, est représentée la variation de y_{BA} en fonction de $\sqrt{R}$. L'emploi de $\sqrt{R}$, comme paramètre, se justifie par le fait que ce nombre intervient naturellement dans l'étude de la couche limite.

Ces deux figures montrent tout d'abord que la valeur du débit est bien fonction du seul nombre de Reynolds. La représentation de la *figure 12* est particulièrement adaptée à l'étude de la variation du débit aux grands nombres de Reynolds. Cette variation semble être, à la précision des expériences,

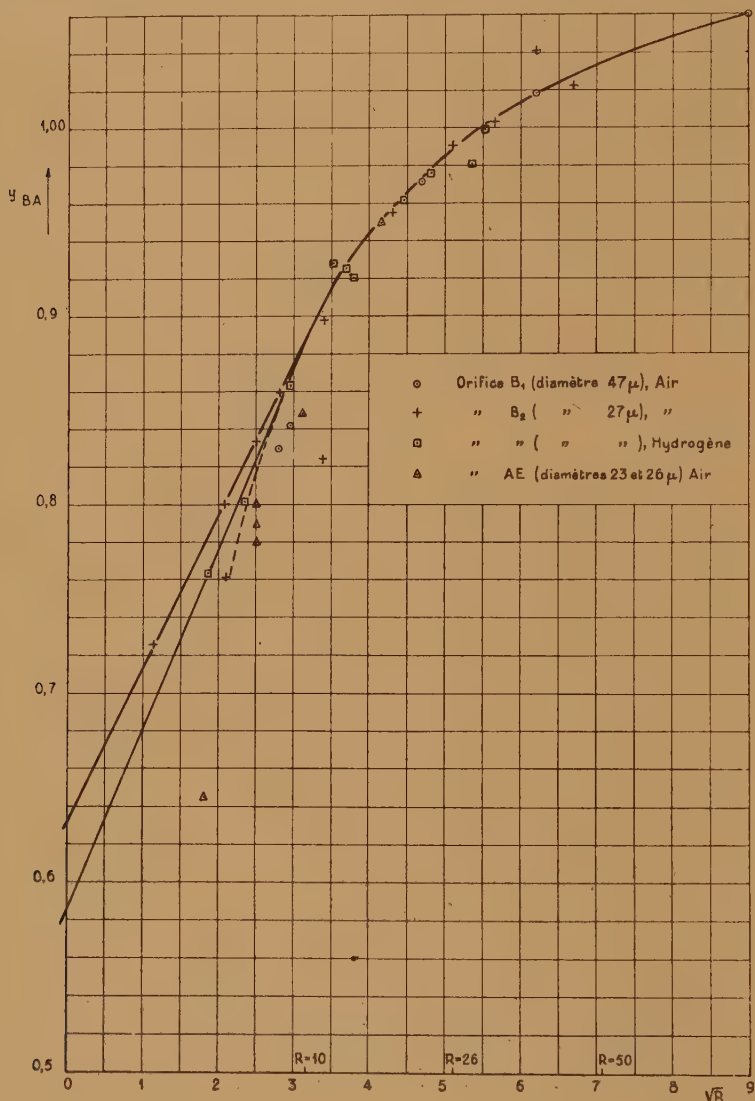


Fig. 13. — Variation du coefficient de débit en fonction de $\sqrt{R}$

linéaire en fonction de $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Pour R infini, la valeur limite de y est 1,15; les mesures absolues de débit donnent, pour $R = 26$, un coefficient de débit de 0,66; la valeur limite du coefficient de débit, pour les grands nombres de Reynolds, serait donc de :

$$1,15 \times 0,66 = 0,76.$$

Si l'on prend cette valeur limite du débit pour unité, la variation du débit, en fonction de R , peut être alors représentée par l'équation :

$$\left(\frac{y}{1,15}\right) = 1 - \frac{0,72}{\sqrt{R}}.$$

Si l'on interprète schématiquement la variation du débit comme étant due à l'existence, dans la section minima, de l'écoulement d'une couronne où la vitesse est inférieure à celle du son et correspondant à une diminution relative apparente η du rayon de la section, le résultat précédent permet d'évaluer η . La diminution de débit serait en effet de $(1 - \eta)^2 \neq 1 - 2\eta$ ce qui, en égalant cette expression au résultat expérimental $1 - \frac{0,72}{\sqrt{R}}$ donne, pour η , la valeur :

$$\eta = \frac{0,36}{\sqrt{R}};$$

cette valeur peut servir comme élément d'une comparaison entre l'expérience et le calcul de la couche limite dans un écoulement autour d'un puits.

La représentation de la *figure 13*, de y en fonction de $\sqrt{R}$, permet d'étudier la variation du débit aux petits nombres de Reynolds; les mesures sont un peu plus dispersées et la similitude semble être moins bonne (voir la section C de ce chapitre), mais cependant elles permettent de conclure que le débit relatif, par rapport à sa valeur pour $R = 26$, semble tendre vers une limite de l'ordre de 0,60.

Les mesures de coefficient de débit absolu (c'est-à-dire, rappelons-le, rapporté au débit théorique calculé en supposant une contraction nulle) mentionnées plus loin donnent, pour $R = 26$, un coefficient de débit absolu de 0,66; par conséquent, le coefficient de débit absolu de l'orifice pour $R = 0$ aurait pour valeur :

$$0,66 \times 0,60 = 0,40.$$

Cette valeur devrait, semble-t-il, représenter le rapport entre le débit d'un orifice en mince paroi, en régime moléculaire, et le débit en régime de Saint-Venant, en supposant une contraction nulle. Calculons donc le rapport des débits théoriques (mesurés en volume de gaz à la pression et à la température amont) d'un tel orifice en régime sonique Q_a et en régime moléculaire Q_m ; le premier est égal, en admettant une contraction nulle, à $\frac{\rho a s}{\rho_0}$ et le second à $s \frac{\bar{c}}{4}$ ⁽¹⁾; donc :

$$\frac{Q_m}{Q_a} = \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\bar{c}}{a} = \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{a_0}{a} \frac{\bar{c}}{a_0},$$

(1) V. JEANS, *Th. dynamique des gaz*, p. 138.

où a_0 et ρ_0 représentent la vitesse du son et la densité dans l'espace amont, a , ρ les mêmes grandeurs à la section minimum, et c la vitesse moyenne des molécules du gaz. En remplaçant les rapports $\frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} \frac{\bar{c}}{a_0}$ par leurs valeurs ⁽¹⁾ :

$$\frac{Q_m}{Q_a} = 0,58.$$

L'expérience donne un débit beaucoup plus faible, dans le rapport $\frac{0,39}{0,58} = 0,67$; le rapport 0,58 correspondrait, sur la *figure 13*, à une valeur limite de y de $\frac{0,58}{0,65} = 0,89$ qui n'est certainement pas conforme à l'expérience.

Pour expliquer cet écart entre les prévisions et le résultat expérimental, j'ai essayé de tenir compte de l'influence de l'épaisseur de la paroi : en effet, si l'on admet, avec KNUDSEN, que les molécules sont diffusées par la paroi, une partie des molécules ayant frappé celle-ci serait renvoyée en amont; le calcul (voir fin du chapitre, section E) donne une diminution de débit qui, dans l'hypothèse d'une diffusion complète, atteint 1,7 % seulement; ceci ramène le coefficient $\frac{Q_m}{Q_a}$ de 0,58 à 0,57, ce qui est loin de combler l'écart expérimental.

C. — Étude de la variation relative du débit avec le sens du parcours.

Dans le tableau III, figurent les différences $y'_{AB} - y'_{BA}$ des débits relatifs lorsqu'on change le sens de parcours. On voit que le débit est toujours plus grand dans le sens AB, ce qui s'explique par la différence de courbure des lignes de courant extrêmes.

Ces valeurs sont des valeurs extrapolées pour $\frac{p_2}{p_1} = 0$, en tenant compte des corrections de débit αx_m qui sont variables d'un sens de parcours à l'autre, puisque α n'est pas le même.

Il est plus rationnel d'étudier le rapport $\frac{Q_{BA}}{Q_{AB}}$ des débits pour une même pression amont et une pression aval nulle; posons :

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_{BA}}{Q_{AB}};$$

d'après la définition de y' , on a :

$$Q_{AB} = y'_{AB} Q_{00} \quad \text{et} \quad Q_{BA} = y'_{BA} \cdot Q_{00},$$

donc :

$$\varepsilon = \frac{y'_{AB} - y'_{BA}}{y'_{AB}}.$$

(1) Voir appendice, chapitre VI.

On déduit donc du tableau III les valeurs de ε données dans le tableau IV.

La représentation graphique de la *figure 14*, donnant ε en fonction de $\sqrt{R}$, montre qu'ici la similitude entre les différents orifices est imparfaite. Ceci n'est pas étonnant dans le cas des orifices B_1 et B_2 car, dans le cas de l'écoulement dans le sens BA (sens divergent, section minima en amont), l'écoulement et l'épaisseur de la couche limite ne doivent pas dépendre beaucoup de l'épaisseur de la paroi, tandis qu'il est probable que la longueur de la partie convergente doit intervenir dans le sens AB (sens convergent, section

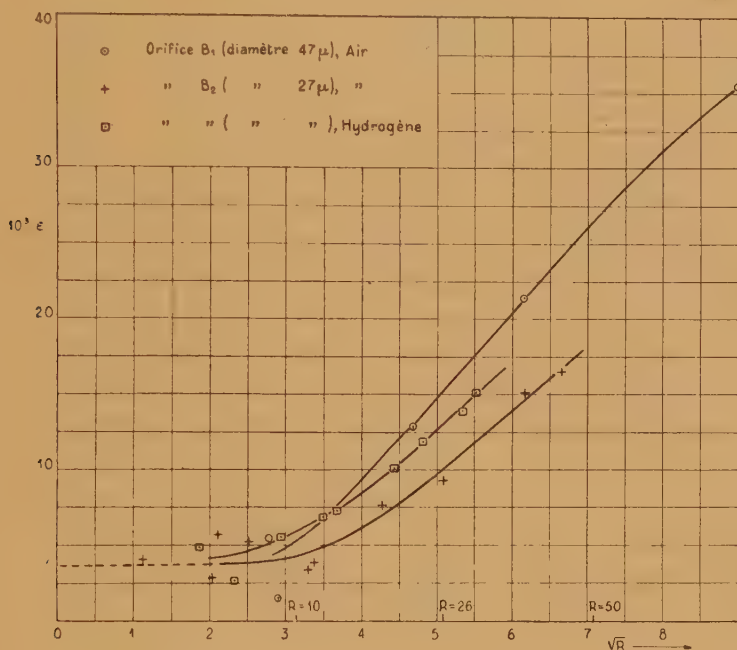


Fig. 14. — Variation du débit avec le sens de parcours

minima dans la surface de sortie); or, il n'y a pas similitude de forme entre les orifices B_1 et B_2 dont l'épaisseur de paroi est la même. Le décalage entre les courbes de variation pour l'air et l'hydrogène, par contre, ne peut être attribué à cette cause. Dans ces courbes, on retrouve encore plus nettement qu'ailleurs le changement de régime observé au voisinage d'une valeur de R de l'ordre de 10.

Il ne semble pas que la valeur de ε tende vers zéro avec R , sa valeur limite étant de l'ordre de 2 à 3 millièmes. Cette valeur devrait être nulle s'il y avait réflexion ou diffusion parfaite, comme nous le montrons plus loin (section E); l'expérience indique donc qu'il doit y avoir réflexion et diffusion partielles, ce qui donne bien une différence dans le sens observé (section E de ce chapitre).

D. — Mesure absolue du coefficient de débit pour $R = 26$.

Pour comparer le débit théorique au débit réel, celui-ci doit être connu en valeur absolue; cette valeur se déduit facilement de la connaissance de la perte de charge dans le capillaire si les dimensions de ce dernier sont connues avec une précision suffisante. Dans notre cas particulier ⁽¹⁾, cet étalonnage n'a pas pu être fait : le rayon du capillaire ($r = 0,10$ mm) n'avait été déterminé que par une mesure au micromètre pouvant entraîner des erreurs de plus de 10 % sur le débit. Pour ne pas être sans aucune donnée, j'ai fait néanmoins une mesure de débit par une méthode rapide et n'exigeant pas le démontage de l'appareil. Le principe, très simple, de la méthode était de mesurer la vitesse de diminution de la pression dans le récipient amont; cette vitesse était assez faible (0,03 mm SO⁴H² à la seconde) pour que le phénomène puisse être considéré comme isotherme (cette hypothèse tirait sa justification d'expériences antérieures où le même récipient avait été utilisé et dans lesquelles l'évolution de la température du gaz avait été suivie avec un couple thermo-électrique à faible inertie). Deux mesures ont été faites, avec des volumes différents, pour éliminer l'influence des volumes parasites et de la variation de volume due au déplacement de la colonne manométrique; la cause d'erreur la plus importante semble être la variation de la pression atmosphérique pendant la mesure qui n'est connue qu'au 1/10 mm Hg près; le calcul de l'influence de l'inertie de la colonne manométrique montre qu'elle joue un rôle négligeable.

Si V_0 est le volume connu, v_1 le volume parasite, s la section du tube manométrique incliné de pente $\frac{1}{\lambda}$, Δp la variation de pression dans le temps Δt , p_0 la pression initiale, on établit facilement la relation :

$$Q = \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{\Delta t} [V_0 + v_1 + \lambda s p_0],$$

où Q est le débit en volume de gaz mesuré à la pression et à la température du récipient; une mesure, où V_0 est éliminé, donne la relation :

$$Q = \frac{\Delta' p}{p'_0} \frac{1}{\Delta' t} [v_1 + \lambda s p'_0],$$

d'où l'on tire :

$$Q = V_0 \frac{\frac{A}{A'}}{1 - \frac{A}{A'}},$$

en posant :

$$A = \frac{1}{p_0} \frac{\Delta p}{\Delta t}, \quad A' = \frac{1}{p'_0} \frac{\Delta' p}{\Delta' t}.$$

(1) Voir introduction, p. 4.

Les données expérimentales étaient :

$$V_1 = 3672 \text{ cm}^3, \quad \Delta p = 22,4 \text{ mm SO}^4\text{H}^2$$

(corrigé d'une variation de pression atmosphérique de 0,2 mm Hg),

$$\Delta t = 958 \text{ s}, \quad p_0 = 5620 \text{ mm SO}^4\text{H}^2,$$

$$\Delta' p = 18,0 \text{ mm SO}^4\text{H}^2, \quad \Delta' t = 81 \text{ s}, \quad p'_0 = 5610 \text{ mm SO}^4\text{H}^2,$$

d'où :

$$A = 41,6 \cdot 10^{-7} \quad \text{et} \quad A' = 390 \cdot 10^{-7}$$

et, par suite :

$$Q_0 = 1,72 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s},$$

avec une erreur possible de 3 à 4 %.

La perte de charge dans le capillaire à 0° était, avant et après la mesure, de $H_0 = 83,40 \text{ mm SO}^4\text{H}^2$. La perte de charge, pendant la mesure, était légèrement inférieure en raison de la variation de la pression amont; la diminution mesurée était de $0,33 \text{ mm SO}^4\text{H}^2$; la constante de temps de l'espace compris entre le capillaire et le pointeau, mesurée directement, était de 14 s, en appliquant la formule donnée au chapitre IV, B, paragraphe 1, deuxième cas. On a donc :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0,33}{14} = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ mm/s},$$

ce qui est en accord plus que satisfaisant avec la mesure directe :

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{22,4}{958} = 2,36 \text{ mm/s}.$$

La comparaison de cette mesure du débit est également en accord satisfaisant avec les dimensions du capillaire : sa longueur était de 20 cm, son diamètre mesuré au micromètre 0,20 mm; or, l'application de la formule de Poiseuille, $Q = 2,88 \cdot 10^{-2} \frac{r^4}{l} H$ (l_{cm} , r_{mm} , $H_{\text{mm Hg}}$), avec r pour inconnue, donne :

$$r = 0,101 \text{ mm}.$$

Calcul des coefficients de débit des orifices.

Dans une autre expérience que la précédente où la perte de charge dans le capillaire est H , le débit en volume mesuré à la pression p_A et la température 0° du capillaire sera donné par :

$$\frac{Q_{(p_A, 0^\circ)}^T}{Q_0} = \frac{H}{H_0} \left(1 + \frac{H_0 - H}{2 p_A} \right) \quad (\text{voir chapitre VII}),$$

d'où :

$$Q_{(p,T)}^T = Q_0 \frac{H}{H_0} \frac{p_A}{p_1} \frac{T}{273} \left(1 + \frac{H_0 - H}{2 p_A} \right);$$

le débit théorique, dans les mêmes conditions, est :

$$Q_t^T = Q_t^{15} \sqrt{\frac{T}{288}},$$

et nous avons vu que :

$$Q_t^{15} = 1,970 \cdot 10^{-4} s,$$

où s est la section minimum de l'orifice.

Orifice B₁, air, sens AB, diamètre 47 μ :

$$s = 17,4 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2, \quad T = 273 + 21,7,$$

d'où :

$$Q_t^T = 34,7 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$H = 29,47 \text{ mm SO}_4\text{H}_2, \quad p_A = 756,8 \text{ mm Hg}, \quad p_1 = 22,07 \text{ mm Hg},$$

d'où :

$$R = 22,0 \quad \text{et} \quad y = 0,98 \quad (\text{voir section B de ce chapitre}),$$

et enfin :

$$Q_{(p,T)}^T = 1,72 \cdot 10^{-2} \frac{29,47}{83,40} \frac{756,8}{22,07} \frac{295}{273} (1 + 0,005) = 22,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s};$$

pour avoir le débit correspondant à $R = 26$, il faut diviser ce résultat par y , d'où le coefficient de débit :

$$\frac{22,6}{0,98 \times 34,7} = 0,66.$$

Orifice B₂, air, sens AB, diamètre 27 μ :

$$s = 5,75 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2, \quad T = 273 + 23,$$

d'où :

$$Q_t^T = 11,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$H = 20,97 \text{ mm SO}_4\text{H}_2, \quad p_A = 752,0 \text{ mm Hg}, \quad p_1 = 46,7 \text{ mm Hg},$$

d'où :

$$R = 26,5 \quad \text{et} \quad y = 1;$$

donc :

$$Q_{(p,T)}^T = 1,72 \cdot 10^{-2} \frac{20,97}{83,40} \cdot \frac{752,0}{46,7} \cdot \frac{296}{273} (1 + 0,006) = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s} ;$$

coefficient de débit :

$$\frac{7,6}{11,5} = 0,66.$$

Orifice B₂, hydrogène, sens AB.

Il faut ici faire intervenir le rapport des viscosités de l'air et de l'hydrogène. L'hydrogène utilisé n'était pas rigoureusement pur, les impuretés pouvant peut-être atteindre 1 %; d'après les valeurs données dans les tables, pour les mélanges d'hydrogène et d'azote ou d'oxygène, la viscosité du gaz avait une valeur comprise entre $840 \cdot 10^{-7}$ (H² pur) et $880 \cdot 10^{-7}$ (1 % de N² ou O²). La viscosité de l'air valant, à 0°, $1725 \cdot 10^{-7}$ c.g.s., le débit donné par la formule doit être multiplié par un facteur compris entre $\frac{1725}{840} = 2,06$ et $\frac{1725}{880} = 1,96$. De même, le débit théorique s'obtient en multipliant celui donné par la formule précédente par un facteur égal à $\sqrt{14,4} = 3,80$ ou $\sqrt{14,2} = 3,77$:

$$T = 273 + 12,7, \quad \text{d'où} \quad Q_l^T = 42,8 \cdot 10^{-2} \quad \text{ou} \quad 42,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$H = 84,60 \text{ mm SO}^4\text{H}^2, \quad p_A = 756,0 \text{ mm Hg}, \quad p_1 = 98,1 \text{ mm Hg},$$

$$R = 29,3 \quad \text{et} \quad y = 1,01,$$

d'où :

$$Q_{(p,T)}^T = 1,72 \cdot 10^{-2} \frac{84,60}{83,40} \frac{756,0}{98,1} \frac{286}{273} 2,060 = 29,0 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{s},$$

ou

$$Q_{(p,T)}^T = \frac{1,96}{2,06} \cdot 29 = 27,6,$$

d'où un coefficient de débit compris entre

$$\frac{29,0}{1,01 \cdot 42,8} = 0,67 \quad \text{et} \quad \frac{27,6}{1,01 \cdot 42,5} = 0,645;$$

on peut donc admettre qu'il est, lui aussi, égal à 0,66.

E. — Calcul du débit en régime moléculaire d'un orifice en paroi épaisse.

1. — Montrons, tout d'abord, que le débit est indépendant du sens de l'écoulement dans le cas d'une réflexion ou d'une diffusion parfaite des molécules par les parois de l'orifice.

Réflexion. — Une molécule pourra subir zéro, une ou plusieurs réflexions avant de passer de la section d'entrée A à la section de sortie B. Les cas qui nous intéressent sont ceux où il y a réflexion sur la paroi; supposons qu'il y ait une double réflexion ds_1 et ds_2 . Le nombre de molécules, dont les vitesses sont comprises dans un élément de cône solide $d\omega_1$ centré sur une direction d'incidence θ_1 et qui frappent ds_1 , est proportionnel à $ds_1 \cos \theta_1$ et $d\omega_1$; mais, dans une réflexion sur les éléments de paroi infiniment petits, l'angle solide se conserve à des infiniment petits d'ordre supérieur près et les molécules sortent comme si elles provenaient de l'image dans ds_1 de $d\omega_1$ sous le même angle θ_1 . Si donc on prend l'espace B comme espace amont, le nombre de molécules, passant de B en A dans l'angle solide $d\omega_1$ et la direction θ_1 et provenant de ds_1 , sera exactement le même que celui allant de A en B dans le même faisceau. Ce raisonnement étant valable pour toute trajectoire allant d'une section à l'autre, le débit est bien le même dans les deux sens.

Diffusion parfaite.

D'une façon générale, si un élément de surface reçoit $d^4 n$ molécules par seconde, provenant d'une certaine direction θ , on peut poser que les molécules renvoyées en régime permanent dans une autre direction θ' , dans un angle solide $d\omega'$, ont pour nombre :

$$d^4 n \rho(\theta, \theta', \varphi, \varphi') d\omega',$$

où θ et θ' sont les incidences, et φ et φ' les azimuts des pinceaux incident et renvoyé. Dans le cas de la diffusion, ρ ne dépend que de θ' et φ' , et, dans le cas d'une diffusion parfaite :

$$\rho = \frac{\cos \theta'}{\pi}.$$

Faisons le calcul dans l'hypothèse intermédiaire où ρ est une fonction quelconque de θ' seulement.

L'élément ds_1 reçoit, de la direction θ_1 , un nombre de molécules égal à :

$$d^4 n = \sqrt{c} ds_1 \cos \theta_1 \frac{d\omega_1}{4\pi} = k ds_1 \cos \theta_1 d\omega_1$$

($\sqrt{c}$ nombre de molécules par cm^3 , c vitesse moyenne); de ces molécules il est diffusé, dans la direction θ'_1 :

$$d^6 n = d^4 n \rho(\theta'_1) d\omega'_1 = k ds_1 \cos \theta_1 \rho(\theta'_1) d\omega_1 d\omega'_1;$$

ce nombre est celui des molécules reçues par ds_2 si l'on prend :

$$d\omega'_1 = \frac{ds_2 \cos \theta_2}{d_{12}^2};$$

cet élément diffuse alors, dans la direction θ'_2 :

$$d^8 n = d^6 n \rho(\theta'_2) d\omega'_2$$

soit, en définitive :

$$d^8 n = k \frac{ds_1 ds_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \rho(\theta'_1) \rho(\theta'_2)}{d_{12}^2} d\omega_1 d\omega'_2;$$

on généraliserait aisément au cas de plusieurs chocs sur les parois.

Le nombre des molécules passant de A à B, en touchant les éléments ds_1 et ds_2 , s'obtient en intégrant $d^8 n$ dans les angles solides A et B sous lesquels les orifices d'entrée et de sortie sont vus de ds_1 et ds_2 . Si, au contraire, on

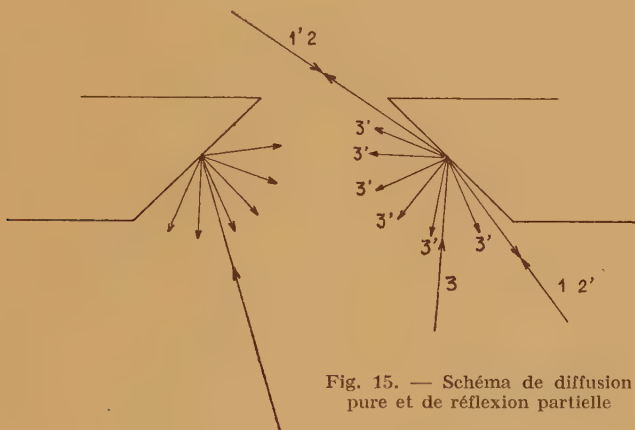


Fig. 15. — Schéma de diffusion pure et de réflexion partielle

voulait calculer le nombre de molécules allant de B en A, le gaz ayant même pression et température de B que celles qu'il avait dans A précédemment, l'expression de $d^8 n$ s'obtiendrait en permutant, dans la formule ci-dessus, θ_1 et θ'_1 , d'une part, θ_2 et θ'_2 , d'autre part; les limites d'intégration étant les mêmes, le résultat obtenu serait donc le même dans le cas de la diffusion parfaite où $\rho(\theta'_1) = \cos \theta'_1$ et $\rho(\theta'_2) = \cos \theta'_2$.

Ce résultat étant valable pour tout élément de la paroi démontre l'identité des débits dans les deux sens, dans l'hypothèse de la diffusion parfaite.

Diffusion partielle.

Le résultat précédent n'est plus valable si la répartition des vitesses diffusées dépend de leur vitesse avant la rencontre avec la paroi; en particulier, si l'on admet une tendance à la réflexion, principalement pour les grandes incidences, on ferait apparaître une dissymétrie entre les deux sens d'écoulement; cela est tout à fait apparent si l'on suppose à la limite qu'il y a réflexion aux grandes incidences, diffusion aux petites (*fig. 15*).

2. — *Calcul du débit dans le cas d'une réflexion ou d'une diffusion parfaite par les parois.*

Lorsqu'il y a réflexion, on voit tout de suite que le débit est le même que pour un orifice en paroi mince, tout au moins avec l'orifice de forme tronconique tel que ceux utilisés; en effet, d'après ce qui précède, il suffit d'examiner ce qui a lieu pour le sens de parcours BA (section croissante), en supposant la paroi polie, et il est évident alors que toute molécule ayant traversé la section d'entrée est réfléchiée vers l'espace aval (*fig. 15*). Le débit est donc alors celui correspondant à la section minimum S; mesuré en nombre de molécules, il vaut alors :

$$N_0 = \frac{1}{4} n \bar{c} S.$$

Lorsqu'il y a diffusion, le débit est moindre, car une partie des molécules frappant la paroi est renvoyée vers l'espace amont; ce retour peut se faire après une ou deux rencontres ou plus; nous admettrons, ce qui sera justifié par l'ordre de grandeur des résultats, que les retours dus à plus d'une rencontre sont négligeables. Soit alors n le nombre de molécules venant frapper la paroi; sur ces n molécules, il y en a n_1 qui sont renvoyées dans l'espace amont donc, en tenant compte de la diffusion :

$$N_1 = N_0 - n_1.$$

Le calcul de n_1 est assez pénible; pour simplifier les expressions, j'ai admis que l'angle au sommet du cône formé par les parois de l'orifice était égal à 90° , ce qui est très près de la vérité (sa valeur exacte étant 84°). Un élément de paroi reçoit dans la direction θ , et par seconde, un nombre de molécules :

$$d^2 n = \sqrt{c} ds \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi};$$

il reçoit donc en tout :

$$dn = \sqrt{c} ds \int_{\Omega} \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi},$$

l'intégrale étant étendue au cône de sommet ds et s'appuyant sur l'orifice d'entrée; le nombre de molécules diffusées, de direction θ , est :

$$d^2 n_1 = dn \cos \theta' \frac{d\omega'}{\pi};$$

donc :

$$dn_1 = 4 dn \int_{\Omega} \cos \theta' \frac{d\omega'}{4\pi},$$

le domaine d'intégration étant le même. Ce cône est le même pour tous les éléments du tronc de cône élémentaire, de hauteur dX , dont le plan est à la distance X de l'orifice (*fig. 16*), la surface de ce tronc de cône peut donc être prise comme élément de surface; l'intégrale $\int_A \cos \theta \, d\omega$ est fonction seulement de X , en introduisant la variable sans dimension $t = \frac{X}{r}$ (r , rayon de l'orifice); on a en définitive :

$$dn = \nu \bar{c} \chi(t) \, ds, \quad dn_1 = 4 \nu \bar{c} \, ds \, \chi^2(t),$$

avec :

$$\chi(t) = \int_A \cos \theta \, \frac{d\omega}{4\pi},$$

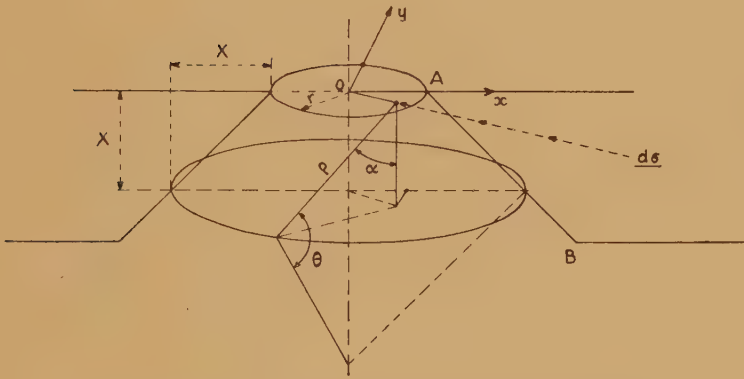


Fig. 16. — Calcul du coefficient de débit en régime moléculaire

et comme :

$$ds = 2\pi(X + r) \, dX \cdot \sqrt{2} = 2\pi r^2 \sqrt{2} (1 + t) \, dt,$$

nous avons :

$$n = 2\sqrt{2} \nu \bar{c} S \int_0^{t_1} \chi(t) (1 + t) \, dt \quad \text{et} \quad n_1 = 8\sqrt{2} \nu \bar{c} S \int_0^{t_1} \chi^2(t) (1 + t) \, dt,$$

où :

$$S = \pi r^2 \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{r_1}{r} \quad (r_1 \text{ rayon de la grande base}).$$

Tout revient à calculer $\chi(t)$.

Si $d\sigma$ est un élément de surface d'entrée, on a (*fig. 16*) :

$$\cos \theta \, \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos \theta \cdot \cos \alpha}{\rho^2} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos \theta \cdot \cos \alpha}{\rho^2} \, dx \, dy$$

et, avec les axes de coordonnées indiqués :

$$\rho^2 = (X + r + x)^2 + y^2 + X^2 \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{r + x}{\rho \sqrt{2}} \cos \alpha = \frac{X}{\rho};$$

donc :

$$\cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{X}{4\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{(r+x)}{\rho^4} dx \cdot dy;$$

posons :

$$f^2(t) = 2t^2 + 2t + 1 + 2(t+1)\bar{x} + \bar{x}^2,$$

avec :

$$\bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r};$$

on a :

$$\rho^2 = r^2 [f^2(t) + \bar{y}^2],$$

et :

$$4\pi\sqrt{2}\chi(t) = \int_{-1}^{+1} t(1+\bar{x}) d\bar{x} \int_{-\bar{y}_1}^{+\bar{y}_1} \frac{d\bar{y}}{(f^2 + \bar{y}^2)^2};$$

où :

$$\bar{y}_1 = \sqrt{1 - \bar{x}^2},$$

et enfin :

$$4\pi\sqrt{2}\chi(t) = \frac{t}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(1+\bar{x})\sqrt{1-\bar{x}^2}}{f^2(\bar{x})[t^2+t+1+(t+1)\bar{x}]} d\bar{x} + t \int_{-1}^{+1} \frac{(1+\bar{x})}{f^3} \arctg \frac{\sqrt{1-\bar{x}^2}}{f} d\bar{x};$$

le calcul de la première intégrale n'offre pas de difficultés spéciales.

On obtient :

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{(t+1)^2 + 1}} \left[\sqrt{\frac{t}{2(\sqrt{(t+1)^2 + 1} + t + 1)}} - \frac{t}{\sqrt{(t+1)^2 + 1 + t}} \right];$$

le calcul de la deuxième a été fait graphiquement; le résultat de ces calculs a permis de tracer la courbe donnant $Z = 4\sqrt{2}\chi(t)$ en fonction de t et, par suite $Z^2(1+t)$ qui, par intégration graphique, donne :

$$n_1 = \frac{v c S}{2\sqrt{2}} \int_0^{t_2} Z^2(1+t) dt,$$

où $t_2 = \frac{h}{r}$ (h épaisseur de la paroi) et vaut 3 pour les orifices B_2 et 1,7 pour B_1 .

Pour B_2 , on a la plus forte valeur et l'on trouve alors :

$$n_1 = 0,0045 \text{ v cS} ;$$

donc :

$$N_1 = N_0 \left(1 - \frac{n_1}{N_0} \right) = N_0 (1 - 0,017).$$

REMARQUE. — On peut songer à faire un calcul plus simple en prenant pour valeur approchée la valeur de $\gamma_1(t)$ obtenue en négligeant la variation de θ et θ' d'un point à l'autre du cercle de base, et prenant pour valeur de ces angles et de d les valeurs correspondant au centre; on trouve alors :

$$4\sqrt{2} \gamma_1(t) = \frac{t}{(2t^2 + 2t + t)^2};$$

la courbe représentant $\gamma_1(t)$ montre que l'approximation est très grossière: elle conduit à $n_1 = 0,003 \text{ v cS}$.

CONCLUSION

Les mesures de débit réalisées sur des orifices à profil tronconique de différents diamètres, avec de l'air et de l'hydrogène, montrent que le débit, mesuré en volume de gaz à la pression et à la température de l'espace amont, n'est pas indépendant de la pression aval, comme l'indiquerait la théorie élémentaire. Outre la variation de débit due au changement de la section minima mise en évidence par STANTON, pour les nombres de Reynolds élevés, il se produit une variation du débit avec la pression aval d'autant plus rapide que le nombre de Reynolds de l'écoulement est plus petit. Le nombre de Reynolds étant d'ailleurs, dans le type d'écoulement étudié, sensiblement égal au rapport du diamètre de l'orifice au libre parcours moyen des molécules.

L'influence de la pression aval est beaucoup plus grande lorsque la section minima de l'orifice est à l'aval. L'influence de la pression aval mesurée par la pente des courbes de débit semble croître, de façon continue, lorsque le nombre de Reynolds décroît jusqu'à une valeur voisine de 10. Au-dessous de cette valeur, le débit ne dépend presque plus du sens de parcours du gaz dans l'orifice et sa loi de variation tend vers celle d'un écoulement moléculaire où le débit en masse est proportionnel à la différence des pressions.

La même valeur du nombre de Reynolds intervient pour séparer deux domaines de variation distincts, dans l'étude du débit pour une pression nulle en aval. La loi de variation de ce débit, en fonction du nombre de Reynolds, pour les grandes valeurs de celui-ci, est celle qui correspondrait à l'existence d'une couche limite dont l'épaisseur de déplacement serait proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{R}}$; la valeur du coefficient de proportionnalité est donnée par l'expérience et serait à comparer à la valeur donnée par l'intégration de l'équation de la couche limite qui n'a été, jusqu'ici, réalisée au moyen de l'analyseur différentiel que pour des champs de vitesse différant notablement de celui d'un puits.

Le débit, pour une pression aval nulle, semble tendre, pour les petits nombres de Reynolds, vers une valeur très inférieure à celle correspondant au régime d'écoulement moléculaire pour un orifice en paroi mince, l'écart étant très supérieur à celui qui peut être calculé lorsqu'on tient compte de l'épaisseur des parois et que l'on suppose que celles-ci diffusent parfaitement les molécules qui les frappent.

La variation du débit avec le sens de parcours, quoique relativement très faible aux petits nombres de Reynolds, n'est cependant pas nulle, ce qui indique que le choc des molécules sur la paroi n'est suivi ni d'une réflexion ni d'une diffusion pure.

En résumé, ces expériences indiquent l'ordre de grandeur des nombres de Reynolds jusqu'où s'étend le domaine de l'écoulement en masse et montrent que lorsque le diamètre de l'orifice est de quelques livres parcours moyens, la théorie de l'écoulement moléculaire ne donne pas la valeur réelle du débit.

Par ailleurs, quelques conclusions pratiques peuvent être dégagées quant aux meilleures conditions d'emploi des petits orifices comme régulateurs de débit. En particulier, elles s'opposent à un point de vue généralement admis, que l'écoulement dans le sens divergent est moins stable, donc moins intéressant dans l'emploi comme régulateur, que l'écoulement dans le sens convergent dans un orifice, en mince paroi, de forme conique. Au contraire, tout au moins pour les faibles valeurs du rapport des pressions aval et amont, c'est le premier sens d'écoulement qui, pour un nombre de Reynolds donné, procure la plus grande indépendance entre le débit et la valeur de la pression et est donc à recommander.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LE MICROSCOPE ÉLECTRONIQUE

Vu et approuvé :

Paris, le 27 juin 1945.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MONTEL

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY





IMPRIMERIE